

N° d'ordre : 2462

**THÈSE**  
PRÉSENTÉE À  
**L'UNIVERSITÉ BORDEAUX I**  
ÉCOLE DOCTORALE  
DES SCIENCES PHYSIQUES ET DE L'INGÉNIEUR  
par **Frédéric SAINT-CAST**  
POUR OBTENIR LE GRADE DE  
**DOCTEUR**  
SPÉCIALITÉ : MÉCANIQUE

---

**MODÉLISATION DE LA MORPHODYNAMIQUE  
DES CORPS SABLEUX EN MILIEU LITTORAL**

---

*Soutenue le :* 24 juin 2002

*Après avis de :*

MM. M. MORY, Professeur, ENSGTI, Pau ..... Rapporteur  
V. REY, Maître de Conférence HDR, LSEET, Toulon ..... Rapporteur

*Devant la Commission d'examen formée de :*

MM. M. MORY, Professeur, ENSGTI, Pau ..... Président  
H. MICHALLET, Chargé de recherche au CNRS, LEGI, Grenoble Rapporteur  
J.P. CALTAGIRONE, Professeur, MASTER, Bordeaux ..... Examineur  
P. BONNETON, Chargé de recherche au CNRS, DGO, Bordeaux Examineur  
P. BUAT-MÉNARD, Vice-président du conseil scientifique, Bdx... Examineur  
V. REY, Maître de Conférence HDR, LSEET, Toulon ..... Examineur



# Remerciements

Ces travaux de thèse ont été réalisés au sein du laboratoire de Modélisation Avancée des Systèmes Thermiques et des Écoulements Réels de l'École Nationale Supérieure de Chimie et de Physique de Bordeaux (MASTER-ENSCP), en collaboration avec le Département de Géologie et Océanographie de l'Unité Mixte de Recherche CNRS Environnements et Paléoenvironnements OCéaniques de l'Université Bordeaux 1 (DGO UMR CNRS 5805).

En premier lieu, je tiens à manifester ma plus profonde et sincère reconnaissance en vers mes co-directeurs de thèse Jean-Paul CALTAGIRONE du laboratoire MASTER, Professeur à l'Université Bordeaux 1 et Philippe BONNETON du DGO, Chargé de recherches au CNRS. Je leur suis redevable d'un accueil chaleureux, de conseils avisés et d'un soutien constant. Jean-Paul à fait preuve d'une grande confiance et d'une gentillesse permanente à mon égard, tandis que les nombreux échanges scientifiques avec Philippe ont été extrêmement intéressants, enrichissants et comme toujours amicaux !

J'exprime mes plus vifs remerciements aux rapporteurs de mes travaux. Mathieu MORY, Professeur à l'ENSGTI, Université de Pau et des Pays de l'Adour, par sa vision large de la thématique, Vincent REY, Maître

de Conférence HDR au LSEET, Université de Toulon et du Var, par son esprit critique et son souci de précision, et Hervé MICHALLET, Chargé de recherche CNRS au LEGI, Université J. Fourier de Grenoble, pour ses remarques et suggestions pertinentes, m'ont permis d'améliorer de manière significative la présentation de mon travail.

J'ai été très honoré de l'intérêt qu'a manifesté Partick BUAT-MENARD, Vice-président du conseil scientifique de l'Université de Bordeaux 1, à l'égard de mes recherches menées à l'interface de deux laboratoires complémentaires, le MASTER et le DGO, appartenant respectivement à l'UFR de Physique et à l'UFR des Sciences de la terre et de la mer. Pour cela, je le remercie cordialement d'avoir accepté d'examiner mes travaux.

Je remercie également tous les membres du laboratoire MASTER, du DGO et mes autres collègues français (Bordeaux, Anglet, Toulouse, Perpignan, Marseille, Toulon, Grenoble, Lille, Rouen, Caen, etc.) et étrangers (Espagne, Italie, Hollande, Danemark, Angleterre, Irlande, Québec, USA, Japon, Australie, etc.), que j'ai côtoyé durant ces années de thèse. La liste de toutes ces personnes est bien trop longue pour les citer de manière exhaustive, cependant, j'aimerais que chacun puisse trouver ici l'expression de ma gratitude et de mon amitié, pour leur contribution à cette ambiance de travail chaleureuse et néanmoins studieuse.

Enfin, j'aimerais dédier quelques clins d'oeil plus personnalisés à ma famille, à mes amis et amies, de longue date ou plus récent, avec qui j'ai partagé la vie pendant ces quelques années. La place viendrait bien trop rapidement à manquer sur cette feuille pour t'exprimer ma joie de te connaître, néanmoins, je te pris d'accepter un grand :

MERCI !

Cette expression, toute simple en apparence, recèle, au fond, toute l'intensité des moments qu'on a su apprécier ensemble, alors encore une fois :

MERCI POUR TOUS CES BONS MOMENTS !!!

Frédéric

# Sommaire

<b>Introduction générale</b>	<b>1</b>
<b>1 Modélisation mathématique des courants moyens induits par les vagues</b>	<b>11</b>
1.1 Introduction . . . . .	11
1.2 Obtention du modèle de courant moyen 2DH . . . . .	12
1.2.1 Représentation de l'écoulement et ses interfaces . . . . .	14
1.2.2 Intégration spatio-temporelle des équations de Navier-Stokes . . . . .	15
1.3 Paramétrisation et fermeture du modèle . . . . .	21
1.3.1 Modélisation des contraintes aux interfaces de l'écoulement . . . . .	22
1.3.2 Modélisation de la houle et des tensions de radiation . . . . .	23
1.3.3 Modélisation de la diffusion latérale des courants moyens . . . . .	31
1.4 Conclusion . . . . .	34
<b>2 Dynamique sédimentaire</b>	<b>35</b>
2.1 Introduction . . . . .	35
2.2 Modélisation du transport sédimentaire . . . . .	37
2.2.1 Mécanismes du transport sédimentaire . . . . .	37
2.2.2 Loi de conservation du sédiment . . . . .	41
2.2.3 Paramétrisation du transport sédimentaire . . . . .	42
2.3 Couplage hydro-sédimentaire 2DH à moyen terme . . . . .	46
2.4 Formation des corps sédimentaires . . . . .	48
2.4.1 Ondes de sable générées par un courant . . . . .	48
2.4.2 Principaux processus d'instabilités des plages sableuses . . . . .	49

---

2.5	Modélisation mathématique des ondes de sable issue du couplage hydro-sédimentaire 2DH . . . . .	54
2.5.1	Décomposition de la loi de conservation du sédiment . . . . .	56
2.5.2	Exploitation du modèle de courant : équation de l'énergie . . . . .	59
2.5.3	Mécanismes mis en évidence par l'équation des ondes de sables . . . . .	64
2.5.4	Evolution des bancs de sable dans un courant de dérive longitudinal . . . . .	73
2.5.5	Limites du modèle des ondes de sable . . . . .	74
2.6	Conclusion . . . . .	75
<b>3</b>	<b>Modélisation numérique des courants moyens induits par les vagues</b>	<b>77</b>
3.1	Introduction . . . . .	77
3.2	Discrétisation numérique . . . . .	79
3.2.1	Discrétisation temporelle implicite . . . . .	81
3.2.2	Couplage débit total - hauteur d'eau . . . . .	85
3.2.3	Discrétisation spatiale . . . . .	87
3.2.4	Conditions limites . . . . .	96
3.3	Résolution numérique . . . . .	98
3.3.1	Grands systèmes linéaires creux . . . . .	99
3.3.2	Préconditionnement et solveur . . . . .	100
3.3.3	Critère de stationnarité des courants moyens . . . . .	102
3.4	Validations . . . . .	104
3.4.1	Propagation des ondes longues . . . . .	105
3.4.2	Ecoulements 2D stationnaires . . . . .	119
3.4.3	Performance du modèle numérique . . . . .	133
3.5	Conclusion . . . . .	133
<b>4</b>	<b>Résolution numérique de la loi de conservation du sédiment</b>	<b>135</b>
4.1	Introduction . . . . .	135
4.2	Deux approches pour résoudre la loi de conservation du sédiment . . . . .	137
4.2.1	Schéma TVD pour traiter les équations de transport advectif . . . . .	138
4.2.2	Schéma NOCS pour intégrer les lois de conservation hyperboliques . . . . .	150
4.3	Comparaison des méthodes . . . . .	155
4.3.1	Morphodynamique 1D avec une solution analytique . . . . .	155

---

4.3.2	Equation de Burger 2D . . . . .	161
4.3.3	Advection dans un champ de vitesse tournant . . . . .	163
4.4	Conclusion . . . . .	166
<b>5</b>	<b>Application à la côte aquitaine : étude d'une plage à barres subtidales</b>	<b>167</b>
5.1	Introduction . . . . .	167
5.2	Spécificités de la côte aquitaine . . . . .	168
5.2.1	L'hydrodynamique littorale . . . . .	168
5.2.2	Les plages de sable . . . . .	169
5.3	Simulation des courants moyens induits par la houle . . . . .	169
5.3.1	Les vagues . . . . .	171
5.3.2	Les courants moyens . . . . .	175
5.4	Evolution de la bathymétrie . . . . .	178
5.4.1	Transport sédimentaire . . . . .	180
5.4.2	Evolution de la plage pour des niveaux du plan d'eau fixés . . . . .	188
5.4.3	Evolution de la plage en présence de la marée . . . . .	190
5.5	Conclusion . . . . .	192
	<b>Conclusion générale</b>	<b>193</b>
	<b>Annexes</b>	<b>197</b>
	<b>A Ondes longues</b>	<b>197</b>
A.1	Ondes infragravitaires . . . . .	197
A.2	Instabilités du courant longitudinal . . . . .	199
A.3	Modélisation des ondes longues . . . . .	199
	<b>B Modélisation du frottement au fond</b>	<b>201</b>
B.1	Courant seul . . . . .	201
B.2	Houle seule . . . . .	203
B.3	Combinaison houle et courant . . . . .	204

---

<b>C</b>	<b>Lois de conservations et discontinuités</b>	<b>207</b>
<b>D</b>	<b>Théorie des surfaces caractéristiques</b>	<b>209</b>
<b>E</b>	<b>Préconditionnements et Solveurs</b>	<b>213</b>
E.1	Préconditionnement . . . . .	213
E.1.1	Préconditionnement Jacobi . . . . .	213
E.1.2	Préconditionnement SOR . . . . .	213
E.1.3	Factorisations Incomplètes de Cholesky . . . . .	214
E.2	Solveurs itératifs . . . . .	215
E.2.1	méthode CG . . . . .	216
E.2.2	méthode BiCG . . . . .	218
E.2.3	méthode BiCGSTAB . . . . .	218
E.2.4	méthode FOM . . . . .	220
E.2.5	méthode GMRES . . . . .	222
<b>F</b>	<b>Discrétisation numérique</b>	<b>225</b>
F.1	Loi de conservation de la quantité de mouvement suivant $\vec{y}$ . . . . .	225
F.2	Conditions limites . . . . .	228
	<b>Bibliographie</b>	<b>233</b>

# Introduction générale

## **Les enjeux de la recherche sur les écoulements littoraux**

L'action de la mer sur le littoral peut prendre différentes formes : submersion, recul de la côte ou engraissement des plages. Ces phénomènes naturels sont dus à la dégradation chimique, biologique et/ou mécanique des matériaux qui constituent le littoral. Néanmoins, ce phénomène touche les façades maritimes de façon inégale en fonction des types de côtes.

Les côtes peuvent être classées en trois catégories : les côtes rocheuses, les plages de sable (ou de galets) et les côtes formées des sédiments cohésifs. Toutes les côtes sont sensibles à l'érosion mais leur évolution permanente est plus ou moins rapide en fonction de la rhéologie qui les caractérise. Les côtes rocheuses, de par leur résistance mécanique à l'action de la mer, évoluent sur une échelle de temps "géologique" très longue (quelques milliers années). Les côtes vaseuses se caractérisent par la présence, dans le sédiment, d'une fraction fine suffisamment abondante pour assurer la cohésion de l'ensemble, de sorte que les particules ne peuvent répondre individuellement aux actions des houles et des courants. Ces côtes évoluent de manière globale sur une échelle de temps également assez longue. Les plages de sable sont constituées de particules indépendantes qui répondent rapidement aux sollicitations hydrodynamiques, il en résulte des mouvements à moyenne échelle spatio-temporelle correspondant à l'échelle de temps "sédimentaire" (quelques jours).

L'érosion du littoral s'observe partout dans le monde, et à certains endroits elle est aggravée sous la pression des activités humaines. La France, qui a un important linéaire de côtes (plus de 5 500 km en métropole, et près de 2 000 km pour les DOM-TOM) est particulièrement concernée. Au total, près du quart du littoral français est affecté. La localisation de l'érosion est présentée schématiquement dans le tableau 1 et on constate que les côtes sableuses sont particulièrement concernées.

Les corps sableux sont facilement attaqués et déformés par l'action de la mer et ils

Tableau 1 : Localisation de l'érosion en France; selon CORINE érosion côtière / IFEN (2001), [29].

Façade	Erosion confirmée (en % du linéaire côtier)	Observée principalement sur
Manche / Mer du Nord	30 %	50 % des plages 28 % des côtes rocheuses
Atlantique	24 %	48 % des plages
Méditerranée	11 %	36 % des plages

changent de forme en permanence à des échelles spatio-temporelles très variées, depuis l'échelle du trait de côte jusqu'à celle des rides de sable ou encore de quelques années jusqu'à la période du clapot soulevé par le vent. De ce fait, le comportement des plages est encore mal connu. La recherche sur les écoulements littoraux doit alors apporter une expertise pour favoriser l'aménagement durable des côtes et la protection du littoral.

Dans le cadre de cette thèse, on souhaite contribuer aux recherches sur le couplage entre l'hydrodynamique côtière et le transport sédimentaire pour mieux comprendre la formation des barres sous marines et l'évolution des bancs de sable sur les plages à moyen terme.

### Les spécificités régionales

Ici, le littoral aquitain est choisi comme zone d'étude privilégiée, on l'utilise alors pour fixer certains ordres de grandeur.

D'abord, on considère que la plage est essentiellement constituée de sable (le diamètre moyen est de l'ordre de 200  $\mu m$ ). L'action de la mer déplace ces particules sédimentaires à la fois sur le fond par charriage et en suspension dans la colonne d'eau. Ce transport de sable contribue à déformer la plage. En plus des systèmes de bancs de sable et de chenaux de vidanges, appelés systèmes barres et baïnes (figure 1), qui apparaissent de manière

---

assez régulière tout au long du rivage dans la zone intertidale et dont la longueur d'onde moyenne est de l'ordre de 400  $m$ , on observe des barres immergées en forme de croissant un peu plus au large (figure 2) dont la longueur d'onde moyenne est de l'ordre de 1000  $m$ . Même s'il est difficile de s'en rendre compte en une journée, la plage est véritablement en mouvement et les bancs de sable évoluent en permanence (la vitesse de propagation parallèle à la plage d'un système de barres est de l'ordre de 2  $m/j$ ) (Lafon et al. (2000), [74]).

Ensuite, on distingue deux phénomènes hydrodynamiques majeurs qui contribuent de manière directe ou indirecte au transport sédimentaire et à façonner la plage : les vagues et la marée.

Les vagues sont générées au large des côtes par l'action du vent à la surface de l'eau. Il en résulte un mouvement essentiellement ondulatoire des masses d'eau transmis de proche en proche et contrôlé par la force de gravité. Le plus souvent, lorsque le vent souffle, la surface de l'eau s'agite pour former la mer du vent tandis que loin de la zone ventée, le mouvement des vagues s'organise en ondulations régulières et cohérentes pour former la houle. En arrivant sur les côtes la profondeur d'eau diminue et la houle se cambre progressivement jusqu'à former des vagues déferlantes. Les vagues déferlantes représentent le processus hydrodynamique prépondérant sur la plage (amplitude moyenne de l'ordre de 1.5  $m$ ). Cependant, comme la zone de déferlement des vagues est très liée à la profondeur d'eau, la marée orchestre les effets de la houle en définissant le niveau moyen du plan d'eau.

La marée est un large mouvement des masses d'eau à l'échelle océanique dont les oscillations sont entretenues par l'attraction des astres qui entourent la planète, principalement celle de la lune et du soleil. En Aquitaine, les effets de la marée se réduisent principalement à une variation semi-diurne du niveau moyen de la mer (le marnage de vives-eaux est de l'ordre de 5  $m$ ) et les courants induits par la marée sont très faibles (de l'ordre de 1  $cm/s$ ) par rapport aux courants induits par les vagues (de l'ordre de 1  $m/s$ ) (Castelle (2001), [22]).

Les interactions entre les différentes échelles spatio-temporelles font que la houle joue un rôle déterminant dans l'hydrodynamique littorale. A l'approche des côtes, la houle change de forme et, en arrivant continuellement sur la plage, donnent naissance à un courant de dérive moyen parallèle à la côte (*longshore current*). On observe également un courant de retour dirigé vers le large dont l'intensité est souvent plus faible (*undertow*).



Figure 1 : Photographie aérienne de la plage du Truc Vert lors de la campagne du PNEC-ART7 (18 octobre 2001).

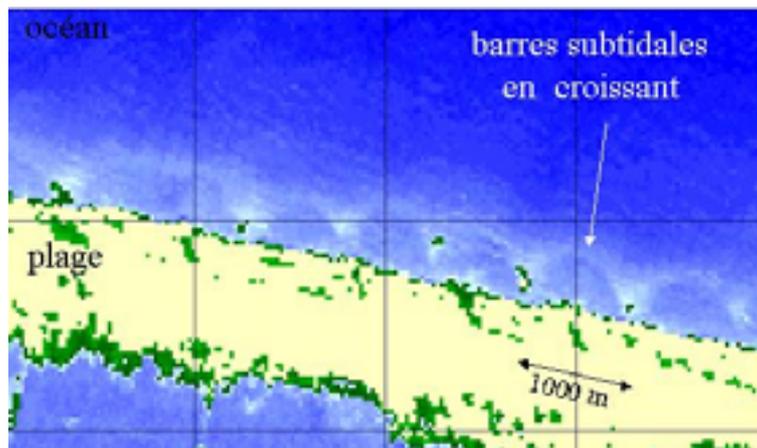


Figure 2 : Mise en évidence des barres en croissant dans la zone subtidale à partir d'images SPOT; DGO/UMR 5805 EPOC.

## Les bases de la modélisation

Les écoulements en milieu littoral se caractérisent par une grande variété de phénomènes hydrodynamiques et sédimentaires qui interagissent à des échelles de temps et d'espace très diverses.

La notion d'échelle spatio-temporelle est fondamentale, car on n'a pas les moyens expérimentaux, analytiques ou numériques de traiter l'ensemble des processus à toutes les échelles. Ce sont les échelles prépondérantes du phénomène physique qu'on souhaite étudier qui permettent de guider le choix vers un modèle ou une paramétrisation particulière. Par conséquent, chaque composante du modèle morphodynamique doit s'attacher à décrire des mécanismes avec une finesse d'échelle compatible.

On constate aisément sur les plages que la vitesse des courants (de l'ordre de  $1\text{ m/s}$ ) est très grande devant la vitesse de déplacement des bancs de sable (de l'ordre de  $2\text{ m/j}$ ), par conséquent l'échelle de temps hydrodynamique est très petite devant l'échelle de temps sédimentaire. Cela signifie que pour étudier la dynamique d'un banc de sable, il faut intégrer les effets hydrodynamiques rapides au cours du temps jusqu'à obtenir une échelle de temps des phénomènes hydrodynamiques intégrés compatible avec celle du mouvement des bancs de sable.

D'une manière générale, les échelles temporelles et spatiales sont très liées. Par exemple, un processus à petite échelle spatiale se produira sur une petite échelle de temps tandis que les mouvements sur une plus grande échelle de temps s'étendront sur de plus grandes échelles spatiales. Cependant, dans de nombreux phénomènes physiques, les petites échelles et les grandes échelles interagissent: des mouvements à grandes échelles peuvent se dégrader pour former des mouvements à plus petites échelles, tandis que l'intégration au cours du temps d'une dynamique à petite échelle peut engendrer une dynamique à plus grande échelle.

Aujourd'hui, au travers des lois générales de la mécanique, on dispose des équations qui gouvernent les écoulements des fluides et des particules solides. On peut donc modéliser les écoulements relatifs à l'hydrodynamique côtière et au transport sédimentaire.

Les modèles mathématiques sont issus des lois de conservation à la base de la mécanique des fluides et de la mécanique du point: les équations de Navier-Stokes et le principe fondamental de la dynamique. Des premiers résultats numériques sont obtenus en ce qui concerne la propagation des vagues, le déferlement en 3D sur des plages, ou la sédimentation de plusieurs particules dans un écoulements fluide. Cependant avec ces techniques,

on est très loin de pouvoir obtenir une représentation des courants côtiers sur un temps suffisamment long pour décrire le mouvement des bancs de sable sur une plage.

Alors, que ce soit du point de vue de la physique pour mieux comprendre l'influence de chaque phénomène séparément et leurs interactions mutuelles, ou du point de vue du calcul scientifique pour résoudre correctement les équations en limitant le temps de calcul et l'espace mémoire, on aborde la représentation de l'hydrodynamique côtière et du transport sédimentaire par des modèles simplifiés mais représentatifs des principaux phénomènes que l'on veut analyser.

### Démarche suivie

Une part importante des connaissances sur la morphodynamique sédimentaire est issue des recherches appliquées au milieu fluviale mais on trouve aussi une abondante littérature sur le sujet directement dans domaine côtiers et littoral (Fredsoe et Deigaard (1992), [52]; de Vriend et al. (1993), [37]). On peut également citer d'autres travaux de synthèse tels que les intercomparaisons de modèles de morphodynamique côtière européens réalisés dans le cadre du projet G8M *Coastal Morphodynamics Research Project* (Nicholson et al. (1997), [92]).

Les collaborations universitaires permettent d'exploiter les compétences du laboratoire de Modélisation Avancée des Systèmes Thermiques et Ecoulements Réels (MASTER) de l'Ecole Nationale Supérieure de Chimie et de Physique de Bordeaux (ENSCPB) en matière de modélisation numérique et celles du Département de Géologie et d'Océanographie (DGO) de l'Unité Mixte de Recherche (UMR) CNRS Environnements et Paléoenvironnements OCéaniques (EPOC) en ce qui concerne la modélisation physique et les expérimentations sur les plages d'Aquitaine.

L'objectif de cette thèse est de proposer une modélisation mathématique et numérique de la morphodynamique des corps sableux en milieu littoral pour simuler l'évolution de la forme d'une plage de sable sous l'action de la houle et des courants.

Pour répondre à ces attentes, on présente dans le chapitre 1 la modélisation mathématique phénomènes hydrodynamiques. Par rapport à l'échelle horizontale des bancs de sable, le courant sur la plage s'assimile à un écoulement en milieu peu profond. D'autre part, l'intégration temporelle du mouvement des vagues permet de représenter l'effet moteur des vagues sur le courant moyen (forçage dû aux contraintes de radiation) (Longuet-Higgins (1970), [80]). De ce fait, l'hydrodynamique littorale est représentée par un écoulement bi-dimensionnel horizontal (2DH) intégré sur la verticale et moyenné sur "la période" de

---

la houle (Mei (1989), [83]; Svendsen et Putrevu (1996) , [128]).

Le chapitre 2 est consacré à la modélisation mathématique des mécanismes de transport sédimentaire en milieu littoral. A partir des courants moyens et des caractéristiques des vagues, le transport sédimentaire total est évalué pour représenter aussi bien le charriage sur le fond que la suspension dans l'écoulement. Les flux de sédiment sont déterminés par des formules semi-empiriques, exprimées en fonction des variables hydrodynamiques moyenne et des caractéristiques du sédiment (Bailard (1981), [8]). Une fois que l'on connaît le transport sédimentaire sur la plage, l'intégration de la loi de conservation du sédiment au court du temps permet de déterminer l'élévation locale de la bathymétrie. En fait, cette équation de continuité modélise de nombreux phénomènes contrôlant la morphodynamique des formes sédimentaires ( Engelund et Fredsoe (1982), [46]). Dans des conditions d'écoulement spécifiques, en décomposant la loi de conservation du sédiment en fonction des variables hydrodynamiques associées, on parvient à identifier des mécanismes "ondulatoires" de la dynamique sédimentaire. Ce modèle des ondes de sable non-linéaires permet alors de mieux comprendre les effets induits par les courants moyens sur le mouvement, la déformation et les instabilités des corps sédimentaires ( Saint-Cast et al. (2001), [112]).

Ensuite, on présente la discrétisation des modèles précédents pour résoudre numériquement des configurations d'écoulement naturel complexe. Le chapitre 3 est dédié à la résolution du modèle hydrodynamique. Pour étudier la dynamique des corps sableux, on doit se placer à l'échelle de temps sédimentaire. On est alors amené à chercher une solution quasi-stationnaire des courants moyens forcés par les vagues. Pour cela, on a développé une méthode numérique implicite en volumes finis sur maillage décalé (non-collocatif) d'ordre deux (Hirsch (1988,1990), [62], [63]). Cette méthode originale est basée uniquement sur la résolution des deux équations de la quantité de mouvement horizontale. L'équation de conservation de la masse étant couplée numériquement, cela permet donc de se ramener à la résolution d'un grand système linéaire creux à 9 diagonales (Saad et Van der Vorst (1999), [111]).

Le chapitre 4 concerne le traitement numérique de la loi de conservation du sédiment. Le modèle des ondes de sable introduit dans le chapitre 2 ayant permis de mettre en évidence la nature hyperbolique de l'équation de conservation du sédiment, le choix des techniques de résolution du modèle d'évolution du fond se porte sur des schémas numériques explicites robustes permettant d'obtenir des solutions irrégulières au second ordre et sans oscillations numériques parasites (Yee (1987), [151]; Jiang (1998), [69], [68]).

Enfin, par l'intermédiaire du couplage des modèles décrits précédemment (figure 3), on

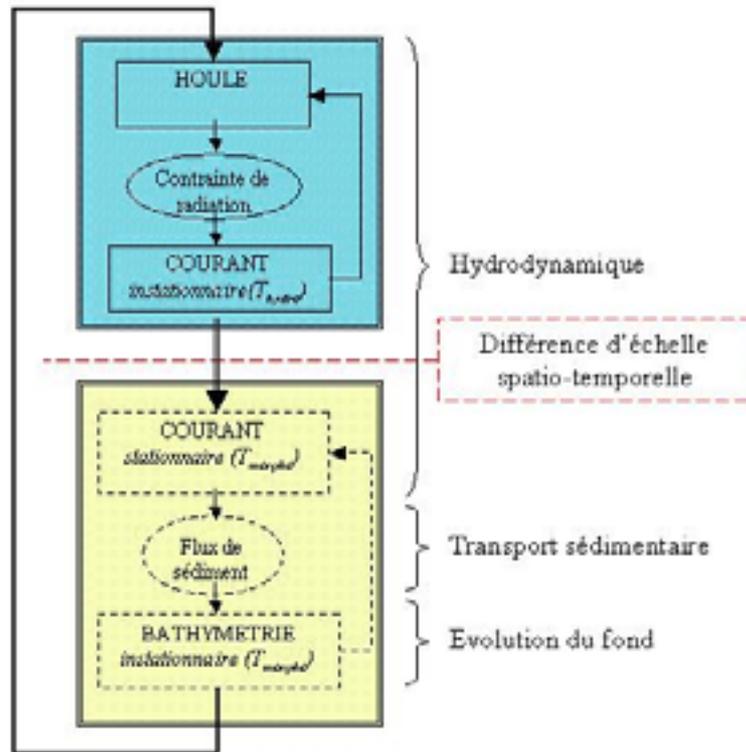


Figure 3 : Architecture du modèle morphodynamique.

présente dans le chapitre 5 les premières applications du modèle à la morphodynamique d'une plage d'Aquitaine (Saint-Cast et al. (2002), [113]).

### Les apports de ces travaux de recherche

On peut distinguer plusieurs contributions de ces travaux de recherche dans le domaine de l'océanographie littorale, de la mécanique des fluides et de la modélisation numérique.

On a entièrement réalisé le logiciel capable de simuler les courants moyens induits par la houle et d'obtenir la morphodynamique sédimentaire associée. Ces travaux permettent de proposer une méthode de couplage numérique originale pour faciliter la résolution du modèle hydrodynamique et obtenir les premières simulations de courant moyen sur les plages d'Aquitaine. De plus, le modèle des ondes de sable permet de mettre en évidence des éléments clés pour comprendre les mécanismes de transport sédimentaire à l'échelle des bancs de sable. Il permet également de traiter numériquement l'évolution du fond comme une équation d'advection-diffusion. Ce modèle ayant un domaine de validité restreint, on propose une méthode numérique alternative pour résoudre directement la loi de conservation du sédiment.

Des simulations morphodynamiques ont été effectuées sur une bathymétrie idéalisée du

littoral girondin présentant une barre pré-littorale immergée. Les résultats de simulation montrent que ces bancs de sable subtidaux en forme de croissant jouent un rôle important dans le façonnage du haut de plage, car ils contrôlent fortement les zones de focalisation de la houle, et la ligne de déferlement des vagues sous laquelle la plage est souvent en accrétion. De plus, à marée basse, les barres en croissants contribuent à stabiliser de larges circulations des courants moyens qui, par la dynamique sédimentaire qu'elles induisent, favorisent la stabilité des barres elles-mêmes.



# Chapitre 1

## Modélisation mathématique des courants moyens induits par les vagues

### 1.1 Introduction

Sur les plages d'Aquitaine, lorsqu'il y a des vagues, on peut facilement voir les mouvements d'eau rapides qui y sont associés. De plus, on remarque l'existence d'un courant moyen qui balaie la plage du nord au sud. En restant plus longtemps sur la plage, on constate également la variation du niveau moyen de la mer associée au mouvement de la marée.

Ces constatations mettent en évidence que l'hydrodynamique littorale est régie par des processus à des échelles spatio-temporelles très variées. La figure (1.1) montre une classification des mouvements de l'eau et de leur échelle de temps respective.

Sur les plages que l'on souhaite étudier, l'énergie de l'écoulement d'eau est principalement fournie par les vagues. Elles jouent un rôle important sur l'écoulement littoral, puisque ce sont principalement elles qui donnent naissance aux courants moyens (figure



Figure 1.1 : Échelle de temps hydrodynamique en milieu littoral.

1.2). On observe par exemple que les vagues obliques à la côte génèrent des courants de dérive parallèles au rivage (*longshore*), tandis que l'apport de masse engendré par des vagues frontales est équilibré par un courant de retour perpendiculaire à la côte (*undertow*). Ces courants peuvent être canalisés vers le large par le relief de la plage pour former des courants sagittaux (*rip-current*).

Il peut aussi se former des mouvements à basses fréquences que l'on appelle ondes longues (annexe A). La modulation d'amplitude des vagues et le cisaillement des courants moyens permettent d'expliquer en partie leur existence. Les phénomènes liés à la marée peuvent être pris en compte en faisant varier le niveau moyen du plan d'eau. Dans la suite, on s'intéresse uniquement à la génération des courants moyens par les vagues.

Dans ce chapitre, on définit la modélisation mathématique intégrée des courants moyens en milieu littoral permettant de prendre en compte l'effet moteur des vagues. Tout d'abord, l'écoulement est considéré comme un milieu peu profond. On peut alors définir les courants bidimensionnels horizontaux (2DH) intégrés verticalement sur la profondeur d'eau. On intègre également le mouvement des vagues dans le temps pour obtenir le mouvement moyen. Au terme de ces intégrations, on est amené à paramétrer certains termes du modèle de courant comme la contrainte de frottement sur le fond et la dissipation des courants moyens. De même, la modélisation du champs de vitesse des vagues permet de déduire les forces motrices du courant moyen.

## 1.2 Obtention du modèle de courant moyen 2DH

Sur les plages, les échelles de longueurs horizontales sont très grandes devant l'échelle verticale représentative de l'écoulement (figure 1.3). De ce fait, même si localement la dynamique peut être tridimensionnelle, en moyenne elle est faible devant les mouvements horizontaux moyens. L'hypothèse de base du modèle hydrodynamique des courants moyens repose donc sur l'approximation des milieux peu profonds. Ainsi, l'intégration selon la verticale entre le fond et la surface libre des lois qui gouvernent l'écoulement 3D permet

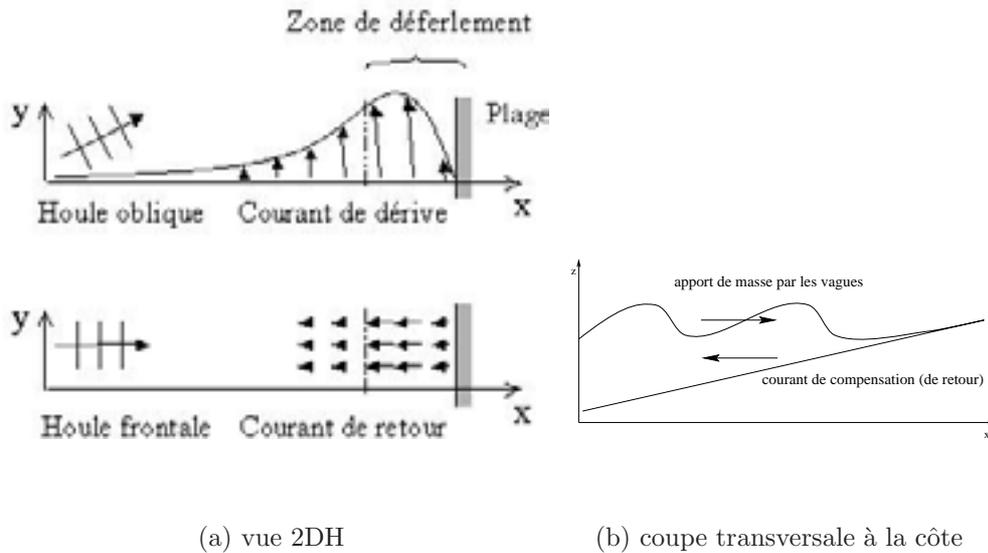


Figure 1.2 : Schématisation des courants moyens induits par la houle.

d'obtenir une représentation satisfaisante de l'hydrodynamique côtière en milieu peu profond. Cette situation permet de justifier l'hypothèse de courant moyen uniforme selon la verticale. Les principales variables représentatives de l'écoulement deviennent la hauteur d'eau et les débits horizontaux.

En fait, les vagues présentes sur la surface libre de l'écoulement engendrent une oscillation complète de la colonne d'eau. Pour en dégager l'effet moyen, on est amené à intégrer les équations du mouvement dans le temps sur une durée permettant de couvrir le spectre des vagues. Ainsi, la double intégration spatio-temporelle des lois qui gouvernent l'écoulement 3D conduit à des lois de conservation 2D pour les variables moyennes avec des termes supplémentaires permettant de modéliser les vagues. On obtient ainsi le modèle de courant moyen 2DH (Mei (1989), [83]; Svendsen (1996), [128]; Bonneton (2001), [15]).

### 1.2.1 Représentation de l'écoulement et ses interfaces

Le mouvement des masses d'eau dans les écoulements avec une surface libre peut être modélisé en suivant les lois de la mécanique des milieux continus. Les équations de Navier-Stokes pour un fluide incompressible décrivent en 3D l'équilibre dynamique entre l'inertie d'un volume élémentaire de fluide et les forces qui s'exercent dessus. Pour

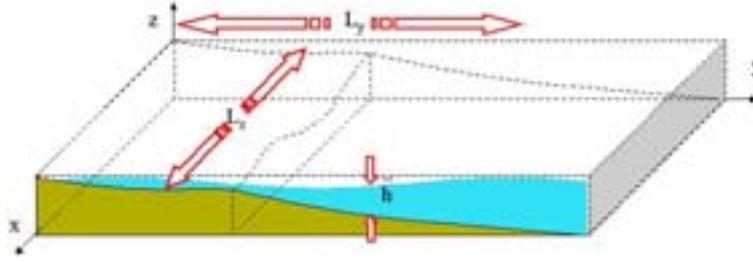


Figure 1.3 : Représentation de l'écoulement littoral comme un milieu peu profond.

décrire plus simplement l'obtention du modèle d'écoulement 2DH, la direction verticale et le plan horizontal sont distingués. Pour cela, la vitesse verticale dans l'écoulement est notée  $w$  avec la coordonnée verticale  $z$ , tandis que les composantes de la vitesse horizontale sont notées  $u_i$  ( $i = 1, 2$  ;  $u_1 = u$ ,  $u_2 = v$ ) avec les coordonnées horizontales  $x_i$  ( $i = 1, 2$  ;  $x_1 = x$ ,  $x_2 = y$ ).

On considère que la masse volumique  $\rho$  du fluide est constante. L'hypothèse d'incompressibilité du fluide se traduit par :

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_j} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (1.1)$$

Les équations de conservation de la quantité de mouvement dans le plan horizontal ( $i=1,2$ ) sont données par :

$$\rho \left( \frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial u_i u_j}{\partial x_j} + \frac{\partial u_i w}{\partial z} \right) = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \frac{\partial \tau_{i3}}{\partial z} \quad (1.2)$$

et l'équation de conservation de la quantité de mouvement dans le plan vertical est donnée par :

$$\rho \left( \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial w u_j}{\partial x_j} + \frac{\partial w^2}{\partial z} \right) = -\frac{\partial}{\partial z} (P + \rho g z) + \frac{\partial \tau_{3j}}{\partial x_j} + \frac{\partial \tau_{33}}{\partial z} \quad (1.3)$$

avec  $\sigma_{ij} = -P\delta_{ij} + \tau_{ij}$  les composantes du tenseur des contraintes dans le fluide. Le terme  $\tau_{ij}$  est l'élément général du tenseur des contraintes de viscosité lié à la déformation du fluide.  $P\delta_{ij}$  correspond aux contraintes de pression qui sont les seules présentes en l'absence de gradients de vitesse (fluide au repos ou en mouvement de translation global).

La pression hydrostatique est définie par :

$$P_h = \rho g (Z_s - z)$$

où  $Z_s$  représente le niveau de la surface libre représenté sur la figure (1.4). Implicitement on suppose que la pression atmosphérique est nulle ( $P_h(z = 0) = 0$ ). La pression dynamique est alors définie par:

$$p = P - P_h \quad (1.4)$$

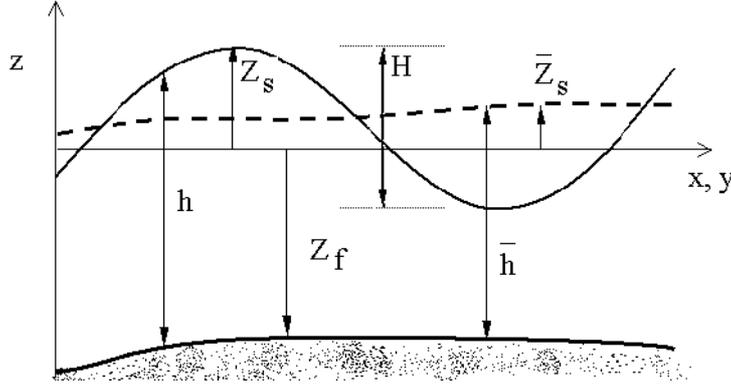


Figure 1.4 : Schéma de définition des variables hydrodynamiques;  
(- - -) position de la surface libre moyenne après  
intégration de la houle.

Le fluide s'écoule entre deux interfaces naturelles ( $\mathcal{I}_*$ ) supposées imperméables à l'échelle de l'écoulement: le fond ( $\mathcal{I}_f$ ) et la surface libre entre l'air et l'eau ( $\mathcal{I}_s$ ). Chaque interface est définie comme une surface continue et monovaluée suivant  $z$ :

$$\mathcal{I}_*(x, y, z, t) = Z_*(x, y, t) - z = 0 \quad (1.5)$$

Les normales unitaires sortantes aux interfaces sont définies par:

$$\vec{n}^s = -\frac{\vec{\nabla}(\mathcal{I}_s)}{\|\vec{\nabla}(\mathcal{I}_s)\|} \quad \text{et} \quad \vec{n}^f = \frac{\vec{\nabla}(\mathcal{I}_f)}{\|\vec{\nabla}(\mathcal{I}_f)\|} \quad (1.6)$$

L'hypothèse de non fragmentation des interfaces se traduit par l'égalité de la vitesse normale du fluide à l'interface avec vitesse normale de l'interface. On obtient ainsi les conditions limites cinématiques des équations de Navier-Stokes:

$$\frac{\partial Z_s}{\partial t} + [u_j]_{Z_s} \frac{\partial Z_s}{\partial x_j} - [w]_{Z_s} = 0 \quad (1.7)$$

$$\frac{\partial Z_f}{\partial t} + [u_j]_{Z_f} \frac{\partial Z_f}{\partial x_j} - [w]_{Z_f} = 0 \quad (1.8)$$

où on note  $[f]_{Z_s}$ , la valeur d'une fonction  $f$  sur sa limite verticale supérieure en  $z = Z_s$  et  $[f]_{Z_f}$  la valeur de  $f$  sur sa limite verticale inférieure en  $z = Z_f$ .

### 1.2.2 Intégration spatio-temporelle des équations de Navier-Stokes

Les équations de Saint-Venant sont obtenues en intégrant les équations de Navier-Stokes (1.1), (1.2) et (1.3), suivant la verticale entre le fond et la surface libre. Pour obtenir chaque terme, la règle de Leibniz est utilisée. Elle permet de décomposer la dérivée d'une intégrale en l'intégrale de la dérivée plus un bilan des contributions des bornes de l'intégrale:

$$\int_{Z_f}^{Z_s} \mathcal{D}(f) dz = \mathcal{D} \left( \int_{Z_f}^{Z_s} f dz \right) + [f]_{Z_f} \cdot \mathcal{D}(Z_f) - [f]_{Z_s} \cdot \mathcal{D}(Z_s) \quad (1.9)$$

pour  $f$  dérivable.

En milieu littoral, le courant est fortement influencé par la présence des vagues. Comme le montre Bonneton (2001), [15], même si la répartition de l'énergie dans le spectre fréquentiel n'est pas toujours très marquée, on considère qu'elle permet de distinguer le domaine fréquentiel des courants moyens et le domaine fréquentiel de la houle. Dans ce cas, on définit l'opérateur de moyenne temporelle par:

$$\bar{f}(t) = \frac{1}{T} \int_{t-T/2}^{t+T/2} f(t') dt' \quad (1.10)$$

où  $T$  est la période d'intégration permettant de couvrir le spectre de la houle.

#### Définition du courant moyen

Par analogie avec la décomposition de la vitesse dans un écoulement turbulent, ici, la vitesse instantanée de l'écoulement est définie comme la somme d'une vitesse moyenne uniforme suivant la verticale (courant moyen  $U_i$ ) et d'une fluctuation de vitesse liée à la houle ( $\tilde{u}_i$ ) (Phillips (1977), [103]):

$$u_i(x, y, z, t) = U_i(x, y, t) + \tilde{u}_i(x, y, z, t) \quad (1.11)$$

En considérant que la vitesse varie peu selon la verticale (figure 1.5), on suppose que le courant moyen est donné par la moyenne temporelle de la vitesse instantanée:

$$\bar{u}_i(x, y, z, t) = U_i(x, y, t) \quad (1.12)$$

Ceci implique également que la moyenne temporelle de la vitesse fluctuante est nulle partout dans l'écoulement:

$$\bar{\tilde{u}}_i(x, y, z, t) = 0 \quad (1.13)$$

par contre le débit moyen des vagues associé est non nul et donné par:

$$\bar{Q}_i = \overline{\int_{Z_f}^{Z_s} \tilde{u}_i dz} \quad (1.14)$$

En première approche, l'hypothèse de milieu peu profond permet de justifier que le courant moyen est indépendant de la profondeur. Cette hypothèse est bien adaptée dans la partie de la colonne d'eau immergée en permanence  $z \in [Z_f, \bar{Z}_s - \frac{1}{2}H]$ , où  $H$  est la hauteur des vagues. Cependant, dans la zone  $z \in [\bar{Z}_s - \frac{1}{2}H, \bar{Z}_s + \frac{1}{2}H]$  cette définition est mal adaptée.

Par ailleurs, Svendsen et Putrevu (1996), [128] proposent une décomposition qui tient compte de la variation verticale du courant moyen mais les relevés expérimentaux présentés sur la figure 1.5 n'en montrent pas la nécessité absolue.

Dans la suite, on utilise la décomposition (1.11) avec les propriétés (1.12) et (1.13) pour définir la relation entre le débit total, le débit apporté par les vagues et le courant moyen:

$$\bar{Q}_i = \bar{h}U_i + \bar{Q}_i \quad (1.15)$$

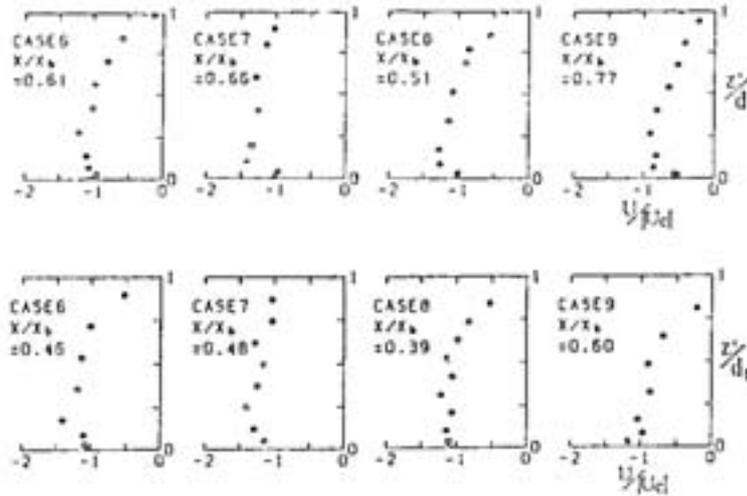


Figure 1.5 : Profil du courant de retour mesuré dans la zone de déferlement pour une plage plane de pente 1/30; selon Okayasu et al. (1988), [96].

### Conservation de la masse

On introduit la hauteur d'eau totale:

$$h = Z_s - Z_f$$

et on définit le débit d'eau horizontal:

$$Q_j = \int_{Z_f}^{Z_s} u_j dz$$

A l'aide de la relation (1.9), l'équation de continuité (1.1) intégrée sur la verticale devient:

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \int_{Z_f}^{Z_s} u_j dz + \left( [u_j]_{Z_f} \frac{\partial Z_f}{\partial x_j} - [w]_{Z_f} \right) - \left( [u_j]_{Z_s} \frac{\partial Z_s}{\partial x_j} - [w]_{Z_s} \right) = 0 \quad (1.16)$$

L'application des conditions limites (1.5) et (1.7) permet de simplifier (1.16). Si on applique l'opérateur de moyenne (1.10) on obtient l'équation de conservation de la masse :

$$\frac{\partial \bar{h}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{Q}_j}{\partial x_j} = 0 \quad (1.17)$$

### Conservation de la quantité de mouvement horizontale

#### a. inertie

Après intégration du membre de gauche de l'équation de la quantité de mouvement (1.2), on obtient :

$$\mathcal{G} = \rho \frac{\partial \bar{Q}_i}{\partial t} + \overline{\frac{\partial}{\partial x_j} \int_{Z_f}^{Z_s} \rho u_j u_i dz} \quad (1.18)$$

$\mathcal{G}$  représente l'inertie totale moyenne de la couche d'eau comprise entre le fond et la surface libre.

Si on développe la partie intégrale du terme d'inertie (1.18), on obtient:

$$\overline{\int_{Z_f}^{Z_s} u_j u_i dz} = \bar{h} U_i U_j + U_i \bar{\tilde{Q}}_j + U_j \bar{\tilde{Q}}_i + \overline{\int_{Z_f}^{Z_s} \tilde{u}_j \tilde{u}_i dz} \quad (1.19)$$

Or en exploitant la définition du débit total (1.15), on a:

$$\frac{\bar{Q}_i \bar{Q}_j}{\bar{h}} = \bar{h} U_i U_j + U_i \bar{\tilde{Q}}_j + U_j \bar{\tilde{Q}}_i + \frac{\bar{\tilde{Q}}_i \bar{\tilde{Q}}_j}{\bar{h}} \quad (1.20)$$

En identifiant les équations (1.19) et (1.20), on en déduit l'expression de l'inertie moyenne de l'écoulement:

$$\mathcal{G} = \underbrace{\rho \frac{\partial \bar{Q}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \rho \frac{\bar{Q}_i \bar{Q}_j}{\bar{h}} \right)}_A - \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \rho \frac{\bar{\tilde{Q}}_i \bar{\tilde{Q}}_j}{\bar{h}} \right) + \overline{\int_{Z_f}^{Z_s} \rho \tilde{u}_j \tilde{u}_i dz} \quad (1.21)$$

L'inertie moyenne de l'écoulement s'exprime sous la forme d'une inertie moyenne totale associée au débit moyen total  $\bar{Q}$  plus une correction d'inertie due aux vagues. Le terme  $A$  représente l'inertie de la colonne d'eau liée au débit total  $\bar{Q}$ . La première partie s'assimile à l'accélération de la couche de fluide due à la variation de son champ de vitesse  $\bar{Q}/\bar{h}$  dans le temps dans un repère eulérien fixe; c'est l'accélération dans un champ homogène instationnaire. La seconde partie correspond à la variation de vitesse de la couche d'eau dans un repère mobile entraîné par l'écoulement; cette accélération est présente même dans un champ de vitesse stationnaire.

### b. bilan des forces

L'intégration du membre de droite de l'équation de la quantité de mouvement (1.2) conduit à:

$$\mathcal{R} = \overline{\frac{\partial}{\partial x_j} \int_{Z_f}^{Z_s} (-P\delta_{ij} + \tau_{ij}) dz} + \left( \overline{[\sigma_{ij}]_{Z_f} \frac{\partial Z_f}{\partial x_j} - [\tau_{i3}]_{Z_f}} \right) - \left( \overline{[\sigma_{ij}]_{Z_s} \frac{\partial Z_s}{\partial x_j} - [\tau_{i3}]_{Z_s}} \right) \quad (1.22)$$

Le premier terme représente la résultante horizontale moyenne des contraintes induites par le fluide sur la colonne d'eau, tandis que les deux autres termes entre parenthèses représentent les contraintes horizontales appliquées aux extrémités de la colonne d'eau.

Il y a continuité des contraintes à travers les discontinuités de contact. Par conséquent sur l'interface  $\mathcal{I}_*$ , le vecteur contrainte du fluide  $[\bar{\sigma} \cdot \bar{n}^*]_{Z_*}$  doit s'équilibrer avec le vecteur contrainte du milieu extérieur  $\vec{T}^* = [\bar{\sigma}^* \cdot \bar{n}^*]_{Z_*}$ . La projection horizontale de cette relation est donnée par:

$$[\sigma_{ij}]_{Z_*} \cdot n_j^* + [\tau_{i3}]_{Z_*} \cdot n_3^* = T_i^* \|\vec{\nabla}(\mathcal{I}_*)\| \quad (1.23)$$

Sur la surface libre, la contrainte totale extérieure imposée par les conditions atmosphériques  $T_i^s$  permet de déduire:

$$[\sigma_{ij}]_{Z_s} \frac{\partial Z_s}{\partial x_j} - [\tau_{i3}]_{Z_s} = -T_i^s \|\vec{\nabla}(\mathcal{I}_s)\| = -\tau_i^s \quad (1.24)$$

Sur le fond, le cisaillement  $T_i^f$  est imposé par les conditions hydrodynamiques et la rugosité du fond:

$$[\tau_{ij}]_{Z_f} \frac{\partial Z_f}{\partial x_j} - [\tau_{i3}]_{Z_f} = -T_i^f \|\vec{\nabla}(\mathcal{I}_f)\| = -\tau_i^f \quad (1.25)$$

La moyenne temporelle de la contrainte horizontale au fond est donnée par:

$$\overline{\left([\sigma_{ij}]_{Z_f} \frac{\partial Z_f}{\partial x_j} - [\tau_{i3}]_{Z_f}\right)} = \overline{[P]}_{Z_f} \frac{\partial Z_f}{\partial x_i} - \bar{\tau}_i^f$$

En générale, la pression dynamique moyenne au fond est négligeable devant la pression hydrostatique moyenne, on en déduit:

$$\begin{aligned} \overline{[P]}_{Z_f} \frac{\partial Z_f}{\partial x_i} &= \rho g \bar{h} \frac{\partial Z_f}{\partial x_i} \\ &= \underbrace{\rho g \bar{h} \frac{\partial \bar{Z}_s}{\partial x_i}}_B - \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{1}{2} \rho g \bar{h}^2 \right) \end{aligned}$$

Le terme  $B$  représente les forces de pression hydrostatique; cette contrainte normale existe même en absence de mouvement du fluide, elle est directement proportionnelle à la hauteur d'eau et à la pente de la surface libre.

Le bilan total des contraintes devient:

$$\begin{aligned} \mathcal{R} = & - \frac{\partial}{\partial x_j} \int_{Z_f}^{Z_s} P \delta_{ij} dz + \frac{\partial}{\partial x_j} \int_{Z_f}^{Z_s} \tau_{ij} dz - \rho g \bar{h} \frac{\partial \bar{Z}_s}{\partial x_i} \\ & + \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{1}{2} \rho g \bar{h}^2 \right) + \bar{\tau}_i^s - \bar{\tau}_i^f \end{aligned} \quad (1.26)$$

En rapprochant les relations (1.21) et (1.26), on obtient la loi de conservation de la quantité de mouvement 2DH:

$$\frac{\partial \bar{Q}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\bar{Q}_i \bar{Q}_j}{\bar{h}} \right) = -g \bar{h} \frac{\partial \bar{Z}_s}{\partial x_i} - \underbrace{\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{S}_{ij}}{\partial x_j}}_C + \underbrace{\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{T}_{ij}}{\partial x_j}}_D + \underbrace{\frac{\bar{\tau}_i^s}{\rho} - \frac{\bar{\tau}_i^f}{\rho}}_E \quad (1.27)$$

avec:

$$\bar{S}_{ij} = \overline{\int_{Z_f}^{Z_s} P \delta_{ij} + \rho \tilde{u}_j \tilde{u}_i dz} - \frac{1}{2} \rho g \bar{h}^2 - \rho \frac{\bar{Q}_i \bar{Q}_j}{\bar{h}} \quad (1.28)$$

$$\bar{T}_{ij} = \overline{\frac{\partial}{\partial x_j} \int_{Z_f}^{Z_s} \tau_{ij} dz} \quad (1.29)$$

La modélisation de la quantité de mouvement moyenne 2DH en présence des vagues est donnée de manière exacte par (1.27). Cette représentation diffère du modèle de Mei (1989), [83], car elle inclut les effets des débits apportés par les vagues comme le préconisent Svendsen et Putrevu (1996), [128], et Bonneton (2001), [15]. Le courant moyen ( $\vec{U}$ ) est alors défini à partir de la relation (1.15), comme la somme du courant au sens de Mei ( $\vec{U}_{Mei}$ ) et du courant de compensation ( $\vec{\tilde{U}}$ ):

$$\vec{U} = \vec{U}_{Mei} + \vec{\tilde{U}} \quad \text{avec} \quad \vec{U}_{Mei} = \frac{\vec{Q}}{h} \quad \text{et} \quad \vec{\tilde{U}} = -\frac{\vec{Q}}{h} \quad (1.30)$$

Le terme  $C$  représente le forçage moyen induit par la houle, ainsi que les autres phénomènes de plus petite échelle de temps comme la turbulence associée aux vagues. Les tensions de radiation ( $\bar{S}_{ij}$ ) données par la relation (1.28) sont à l'origine de ce forçage, elles représentent l'excès de quantité de mouvement induit par le mouvement des vagues. Ces tensions moyennes induites par la houle ont permis à Bowen (1969), [18], Longuet-Higgins (1970), [80], et Thornton (1970), [136], de progresser significativement dans l'analyse des courants longitudinaux dans la zone de surf. De plus, ces tensions de radiation incluent une partie des contraintes turbulentes générées par la houle. Dès lors, à partir d'une bonne description du champ de vitesse de la houle, on est en mesure de décrire le forçage des courants moyens induit par les vagues.

Le terme  $D$  représente l'intégration des contraintes visqueuses dans la colonne d'eau et comme le terme  $C$ , il contient une partie des effets de la turbulence. Mei (1989), [83], montre que ce terme est très souvent négligeable devant les tensions de radiation. Le terme  $E$  représente le bilan des contraintes appliquées aux interfaces de la colonne d'eau.

### 1.3 Paramétrisation et fermeture du modèle

Le modèle de courant moyen 2DH est basé sur la loi de conservation de la masse (1.17) et la loi de conservation de la quantité de mouvement (1.27). Ce modèle intégré dépend principalement des quantités moyennes de l'écoulement mais il fait aussi apparaître des termes plus complexes qu'il faut modéliser. Dans cette partie, on précise la modélisation de la contrainte de frottement au fond par l'approche de Soulsby et al.(1993), [123]. On présente surtout une modélisation spécifique de la houle nécessaire à la fermeture du problème, puisqu'il faut déterminer le champ de vitesse  $\tilde{u}$ . Celle-ci présente la méthode d'obtention des tensions de radiation à l'aide du modèle de houle REFDFIF développé par

Kirby et al. (1994), [72]. Enfin, on décrit la paramétrisation de la diffusion latérale adoptée pour “filtrer” les instabilités du courant de dérive.

### 1.3.1 Modélisation des contraintes aux interfaces de l’écoulement

Dans le cadre de cette thèse, on suppose que la contrainte à la surface libre entre l’atmosphère sur le fluide est nulle:

$$\bar{\tau}_i^s = 0 \tag{1.31}$$

En réalité, le cisaillement lié au vent peut générer des courants importants. Pour pouvoir en tenir compte, il est nécessaire d’inclure une paramétrisation en fonction du vent et de l’état de la mer.

La contrainte horizontale sur le fond s’apparente à une contrainte de cisaillement. Elle est décrite en fonction des caractéristiques de l’écoulement et des propriétés du sédiment. Il est important de noter que le fond sableux joue le rôle d’une interface imperméable entre deux milieux continus. Par continuité des contraintes, la contrainte appliquée au modèle de courant est également appliquée pour déplacer le sédiment.

On présente la modélisation de la contrainte au fond dans l’annexe B. De nombreux modèles tentent de définir la contrainte de frottement sur le fond en présence de courant et de houle. Le point commun entre ces modèles est d’exprimer la contrainte de frottement pour chacun des mécanismes sous une forme quadratique de la vitesse de l’écoulement au fond. La paramétrisation de la contrainte de frottement retenue ici est celle de la contrainte combinée houle et courant donnée par Soulsby et al.(1993), [123]. Ce modèle de frottement s’exprime en fonction de la vitesse moyenne de l’écoulement:

$$\bar{\tau}_i^f = \rho C_f \|\vec{U}\| U_i \tag{1.32}$$

où  $C_f$  est l’équivalent d’un coefficient de frottement global. Il prend en compte les effets combinés de la houle et du courant suivant la paramétrisation (B.31).

Dans certaines applications, le modèle de Soulsby surévalue les effets du frottement. C’est pourquoi on utilise le modèle simplifié de Liu et Dalrymple (1978), [79] et James (1974), [66]. Il s’agit de l’approximation “courant faible” (*weak flow*), dans laquelle on

suppose que le courant ( $U_{Mei}$ ) est petit et presque normal à la vitesse orbitale de la houle ( $U_w$ ):

$$\vec{\tau}^f = \frac{2}{\pi} \rho C_f U_w \vec{U}_{Mei} \quad \text{avec} \quad C_f = 0.015 \quad (1.33)$$

Ce modèle est également utilisé par Wind et Vreugdenhil (1986), [149], pour étudier le développement des courants sagittaux au voisinage des structures.

### 1.3.2 Modélisation de la houle et des tensions de radiation

Les vagues sont générées par l'action du vent sur la surface de l'eau. La durée et la distance sur laquelle le vent a soufflé ont une incidence directe sur la hauteur et la période des vagues qui arrivent sur le rivage. En général, plus la période des vagues est longue et plus la tempête qui lui a donné naissance est éloignée. Par contre, lorsque cette période est courte les vagues semblent désordonnées; le vent est proche.

On a mis en évidence dans le modèle de courant moyen 2DH des termes représentatif des effets moyens induits par la houle : les contraintes de radiation et le courant de compensation. Pour fermer le modèle de courant, il est donc nécessaire de connaître le champ de vitesse fluctuante des vagues ( $\tilde{u}_i(x, y, z, t)$ ) introduit en (1.11).

Comme le courant, le mouvement des ondes de gravité est régi par les lois de conservation de Navier-Stokes. Cependant, il existe plusieurs approches pour obtenir le champs de vagues. On peut citer les modèles de type Boussinesq, Madsen et al. (1997), [81], les modèles spectraux décrits par Booij et al. (1999), [17] ou encore les modèles potentiels Guignard et Grilli (2001), [59]. On a choisi un modèle de réfraction/diffraction basé sur le modèle de Berkhoff parabolisé développé par Kirby et al. (1994), [72].

En dehors des régions de grands gradients de vitesse et de forte vorticité, les effets de diffusion visqueuse sont négligeables. La cinématique des vagues est alors souvent décrite par la théorie des écoulements potentiels (Mei (1989), [83]). Par contre, dans la zone de surf, des modèles paramétriques permettent de représenter la dissipation des vagues par déferlement (Battjes (1975),[11]; Svendsen (1984),[127]; Thornton et Guza (1986), [137]).

En première approximation, la théorie linéaire permet d'obtenir le débit apporté par les vagues, la vitesse orbitale au fond et les tensions de radiations. Cette théorie n'est plus valide dans la zone de déferlement, mais par continuité, on conserve les mêmes formula-

tions en considérant toutefois une loi de décroissance de la hauteur des vagues lors du déferlement.

### Champ de vitesse pour un écoulement potentiel linéaire

Dans le cadre de la théorie des écoulements potentiels, le champ de vitesse  $\vec{u}$  dérive d'un potentiel scalaire  $\Phi$ :

$$\vec{u} = \vec{\nabla}\Phi \quad (1.34)$$

La loi de conservation de la masse se ramène à l'équation de Laplace:

$$\Delta(\Phi) = 0 \quad (1.35)$$

Le champ de vitesse d'une houle linéarisé pour  $z \in [Z_f, \bar{Z}_s]$  est alors donné par:

$$\begin{aligned} \tilde{u}_i &= \frac{1}{2} \frac{gH(x, y)}{c} \frac{\cosh(k(z - Z_f))}{\cosh(k\bar{h})} \cos(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t) \frac{k_i}{k} \\ \tilde{w} &= -\frac{1}{2} \frac{gH(x, y)}{c} \frac{\sinh(k(z - Z_f))}{\cosh(k\bar{h})} \sin(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t) \end{aligned} \quad (1.36)$$

où  $H$  est l'amplitude des vagues. Le nombre d'onde  $k$  et la pulsation  $\omega$  sont liés par la relation de dispersion:

$$\omega^2 = gk \tanh(k\bar{h}) \quad (1.37)$$

La vitesse de phase des vagues  $c$  correspond à la vitesse de déplacement de l'onde. Elle est définie par:

$$c = \frac{\omega}{k} = \left( \frac{g}{k} \tanh(k\bar{h}) \right)^{1/2}$$

La vitesse de groupe correspond à la vitesse de déplacement de l'enveloppe d'un train de vagues dont les longueurs d'ondes sont légèrement différentes. Elle est définie par:

$$c_g = \frac{\partial \omega}{\partial k} = \frac{1}{2} c \left( \frac{2k\bar{h}}{\sinh(2k\bar{h})} + 1 \right)$$

#### a. débit moyen apporté par les vagues

Le débit liquide moyen induit par la houle est calculé par la méthode eulerienne, on distingue deux contributions:

$$\tilde{Q}_i = \underbrace{\int_{Z_f}^{\bar{Z}_s} \tilde{u}_i dz}_A + \underbrace{\int_{\bar{Z}_s}^{\bar{Z}_s} \tilde{u}_i dz}_B \quad (1.38)$$

Dans la colonne d'eau moyenne ( $z \in [Z_f, \bar{Z}_s]$ ), par la définition (1.36) la vitesse moyenne est nulle donc le terme  $A$  est nul. Par contre, pour le terme  $B$ , on peut développer au premier ordre la vitesse au voisinage du niveau moyen de la surface libre:

$$\begin{aligned} [\tilde{u}_i]_z &= [\tilde{u}_i]_{\bar{Z}_s} + (z - \bar{Z}_s) \left[ \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial z} \right]_{\bar{Z}_s} \\ &= \frac{1}{2} \frac{gH}{c} (1 + k \tanh(k\bar{h})(z - \bar{Z}_s)) \cos(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t) \frac{k_i}{k} \end{aligned}$$

La deuxième contribution dans (1.38) devient:

$$\overline{\int_{\bar{Z}_s}^{\bar{Z}_s + \tilde{Z}_s} [\tilde{u}_i]_z dz} = \frac{1}{2} \frac{gH}{c} \overline{\tilde{Z}_s \left( 1 + \frac{1}{2} k \tanh(k\bar{h}) \tilde{Z}_s \right) \cos(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t) \frac{k_i}{k}} \quad (1.39)$$

avec  $\tilde{Z}_s$  la partie fluctuante de la surface libre définie par (1.41). En ne conservant que les termes du premier ordre en  $\tilde{Z}_s$  dans (1.39), on en déduit une expression du débit liquide moyen induit par la houle:

$$\begin{aligned} \bar{Q}_i &= \frac{1}{4} \frac{gH^2}{c} \frac{k_i}{k} \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \cos^2(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t) dt \\ &= \frac{1}{8} \frac{gH^2}{c} \frac{k_i}{k} = \frac{E}{\rho c} \frac{k_i}{k} \end{aligned}$$

où l'énergie totale de la houle par unité de surface  $E$  vaut:

$$E = \frac{1}{8} \rho g H^2$$

## b. vitesse orbitale au fond

La vitesse orbitale de la houle au fond intervient dans la modélisation de la contrainte de frottement au fond et aussi dans l'estimation de la vitesse de l'écoulement au fond pour évaluer le transport sédimentaire. Elle est déduite de (1.36) et (1.37):

$$U_w = \overline{[\|\vec{u}\|]}_{Z_f} = \frac{\pi H}{T \sinh(k\bar{h})} \quad (1.40)$$

## Contraintes de radiation

Les vagues sont décrites de manière générale par des ondes progressives. Par exemple, le déplacement harmonique  $\tilde{Z}_s$  de la surface libre  $Z_s$  autour de son niveau moyen  $\bar{Z}_s$  est donné par:

$$\tilde{Z}_s(x, y, t) = \frac{1}{2} H(x, y) \cos(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t) \quad (1.41)$$

Pour la résolution analytique du modèle, il est pratique d'utiliser les fonctions complexes. Pour la surface libre, on pose:

$$\eta(x, y) = \frac{1}{2}H(x, y)e^{i_c \vec{k} \cdot \vec{x}} \quad (1.42)$$

où  $i_c$  est le nombre imaginaire unitaire  $(-1)^{1/2}$ . L'expression (1.41) devient:

$$\tilde{Z}_s(x, y, t) = R_e \{ \eta(x, y) e^{-i_c \omega t} \} \quad (1.43)$$

Pour fermer le modèle de courant moyen 2DH, il est nécessaire d'exprimer les tensions de radiation (1.28):

$$\bar{S}_{ij} = s_1 + s_2 + s_3 + s_4 + s_5$$

avec les contributions  $s_n$ :

$$\begin{aligned} s_1 &= \frac{1}{4} \rho g \frac{1}{2k^2} \left( \frac{2kh}{\tanh(2kh)} - 1 \right) \left( \left| \frac{\partial \eta}{\partial x} \right|^2 + \left| \frac{\partial \eta}{\partial y} \right|^2 - k^2 |\eta|^2 \right) \delta_{ij} \\ s_2 &= \frac{1}{4} \rho g |\eta|^2 \left( \frac{2kh}{\sinh(2kh)} - 1 \right) \delta_{ij} \\ s_3 &= \frac{1}{4} \rho g |\eta|^2 \delta_{ij} \\ s_4 &= \frac{1}{4} \rho g R_e \left\{ \frac{\partial \eta}{\partial x_i} \frac{\partial \eta^*}{\partial x_j} \right\} \frac{1}{2k^2} \left( \frac{2kh}{\sinh(2kh)} + 1 \right) \\ s_5 &= -\rho \frac{\bar{Q}_i \bar{Q}_j}{\bar{h}} \end{aligned}$$

La variation spatiale de la surface libre est donnée par la relation:

$$\frac{\partial \eta}{\partial x_j} = k_j \eta \left[ \frac{1}{k_j H} \frac{\partial H}{\partial x_j} + i_c \left( 1 + \frac{1}{k_j} \frac{\partial k_p}{\partial x_j} x_p \right) \right]$$

En pratique, à l'échelle de la zone de surf, on peut considérer que la longueur d'onde et l'amplitude des vagues évoluent lentement, on obtient alors:

$$\frac{\partial \eta}{\partial x_j} = i_c k_j \eta$$

On en déduit le modèle des tensions de radiation simplifié:

$$\bar{S}_{ij} = \frac{1}{2} E \left( \frac{k_i k_j}{k^2} \frac{2c_g}{c} + \delta_{ij} \left( \frac{2c_g}{c} - 1 \right) \right) - \frac{E^2}{\rho \bar{h} c^2} \frac{k_i k_j}{k} \quad (1.44)$$

Les tensions de radiation sont proportionnelles à l'énergie de la houle. Le terme de droite correspondant à la contribution  $s_5$  est souvent négligeable devant les autres. Le terme de forçage du courant par la houle est donc directement proportionnel au carré de la hauteur des vagues.

## Hauteur des vagues

Ici, on présente les principaux phénomènes qui régissent la hauteur des vagues. D'abord la réfraction contrôle la vitesse de l'onde en fonction de la profondeur et du courant de l'écoulement dans lequel elle évolue. Ensuite la diffraction autorise la redistribution de l'énergie des vagues vers les zones de moindre énergie. Enfin, la dissipation est contrôlée par le frottement des vagues sur le fond mais surtout par le déferlement dans la zone de surf.

### a. réfraction

La variation de vitesse de phase d'une onde est baptisée réfraction. Quand un train d'ondes planes monochromatiques entre dans une zone de profondeur variable, la vitesse des ondes doit changer selon la relation de dispersion (1.37). Dans le cadre de la théorie linéaire la période de la houle reste conservée. La prise en compte des non-linéarités permettrait une redistribution d'énergie dans le spectre des vagues et conduirait à une modification de cette période (Sénéchal et al. (2002), [120]). Le changement dans la vitesse de phase des ondes apparaît aussi lorsque les vagues se propagent dans un courant non uniforme.

La réfraction est phénomène bien connu en optique, ici, dans le cas des ondes purement sinusoïdales en temps ( $\omega = \text{constante}$ ) et dans la mesure où la longueur d'onde de la houle est petite devant celle de la bathymétrie (pente douce)  $O(\nabla(h)) \ll O(kh)$ , la théorie des rayons permet d'approcher le problème de réfraction de la houle. Il est nécessaire de connaître les caractéristiques de la houle au large comme la période ( $T = \frac{2\pi}{\omega}$ ) et la direction ( $\theta = \tan^{-1}(k_1/k_2)$ ). A partir d'une profondeur d'eau et de la pulsation de la houle, la relation de dispersion (1.37) permet de déterminer directement la vitesse de phase locale. La théorie des rayons permet alors de déduire la variation de l'angle d'incidence de la houle induit par la forme du fond:

$$\frac{\partial\theta}{\partial s} = -\frac{1}{c} \frac{\partial c}{\partial n} \quad (1.45)$$

avec le système de coordonnées  $(\vec{s}, \vec{n})$  tel que  $\vec{s} = \frac{k_1 \vec{k}}{k^2}$  correspond à la direction des vagues et  $\vec{n} = \frac{k_2 \vec{k}}{k^2}$  correspond à la direction normale aux vagues. Un rayon de propagation de la houle est tracé dans la nouvelle direction ( $\theta(s + \delta s) = \theta(s) + \delta s \frac{\partial\theta}{\partial s}$ ) jusqu'à intercepter une nouvelle iso-ligne de profondeur. Comme  $\omega$  n'est pas modifié, la procédure se répète de façon identique. L'amplitude des vagues est déduite de la loi de conservation du flux

d'énergie des vagues:

$$\nabla(E\vec{c}_g) = 0 \quad (1.46)$$

La connaissance des rayons de propagation de la houle permet d'intégrer directement la relation (1.46) entre deux rayons puisque l'énergie se propage le long d'eux ( $E\vec{c}_g \cdot \vec{n} = 0$ ). Entre deux états d'abscisse curviligne  $s_1$  et  $s_2$ , avec  $d$  la distance entre les rayons, on obtient:

$$\left(\frac{H_{s_2}}{H_{s_1}}\right)^2 = \left(\frac{c_{g_{s_1}}}{c_{g_{s_2}}}\right) \left(\frac{d_{s_1}}{d_{s_2}}\right) \quad (1.47)$$

On en conclut que la réfraction a deux effets sur la variation de hauteur des vagues, l'un lié à la variation de profondeur et l'autre lié à la focalisation des rayons.

## b. diffraction

La diffraction des ondes est un mécanisme qui permet à l'énergie de s'étaler perpendiculairement à la direction de propagation dominante de la houle. Les effets de la diffraction des vagues sont particulièrement visibles à proximité des structures marines. Par exemple en suivant la théorie des rayons, des "zones d'ombre géométriques" peuvent apparaître derrière une digue. Le comportement réel des vagues montre que des ondes migrent quand même derrière la structure par diffraction. La diffraction est également un processus important à prendre en compte dans les zones où la réfraction seule permet de prédire une très forte densité d'énergie locale. Dans ce cas, l'énergie des vagues peut être transférée à travers ses rayons de propagation vers des zones de moindre densité énergétique.

L'étude de la propagation des vagues dans des directions arbitraires repose sur un problème 3D qui implique des conditions limites non linéaires. Au premier ordre, lorsque les variations du fond sont lentes, la théorie des écoulements potentiels permet d'obtenir le potentiel des vitesses en fonction de la forme de la surface libre, on note le potentiel complexe:

$$\Phi = -\frac{g}{\omega} i\eta(x, y)f \quad \text{avec} \quad f = \frac{\cosh(k(z - Z_f))}{\cosh(k\bar{h})} \quad (1.48)$$

En profondeur constante, seuls les effets de diffraction sont présents. Le potentiel s'écrit comme le produit de deux fonctions dont l'une ( $\eta$ ) ne varie qu'horizontalement et l'autre

ne dépend que de l'altitude ( $f = f(z)$ ). Ainsi,  $\Delta(f) = \nabla \vec{\nabla} f = k^2 f$ . Pour que le potentiel vérifie l'équation de Laplace (1.35), la surface libre  $\eta$  doit vérifier l'équation d'Helmoltz:

$$\nabla \left( \vec{\nabla} \eta(x, y) \right) + k^2 \eta(x, y) = 0 \quad (1.49)$$

Dans le cas où les vagues se propagent suivant  $x$ , on en déduit le modèle de diffraction elliptique qui détermine l'évolution de la hauteur des vagues en profondeur constante:

$$2ik \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} = 0 \quad (1.50)$$

Dans le cas où l'échelle de longueur caractéristique longitudinale  $L_x$  est grande devant l'échelle de longueur transversale  $L_y$ , on peut introduire le petit paramètre:

$$\epsilon = L_y / L_x \quad (1.51)$$

On considère alors que  $O(\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}) \ll O(\frac{\partial^2 H}{\partial y^2})$ . On en déduit la relation de diffraction parabolisée (Mei (1980), [84]):

$$2ik \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} = 0 \quad (1.52)$$

### c. réfraction et diffraction combinées

Sur les plages, la réfraction est causée essentiellement par les variations de profondeur tandis que la diffraction est causée essentiellement par des discontinuités de la densité d'énergie du champ de vagues. Les deux mécanismes peuvent être résolus séparément sous l'hypothèse que dans les zones dominées par l'un des phénomènes, l'autre est inactif. En présence de structures ou sur des bathymétries complexes, il est important de traiter les deux phénomènes simultanément. Dans le cas d'un fond lentement variable, la résolution du problème potentiel est adapté par Berkhoff (1972), [12]. En intégrant l'équation de Laplace (1.35) sur la hauteur d'eau moyenne, Berkhoff a réduit le problème de réfraction-diffraction à une équation 2DH elliptique linéaire:

$$\nabla \left( cc_g \vec{\nabla} \eta(x, y) \right) + \omega^2 \frac{c_g}{c} \eta(x, y) = 0 \quad (1.53)$$

De par l'hypothèse du fond lentement variable, le modèle de houle (1.53) est connue sous le nom de "mild slope". Cependant, Booij (1983), [16], a montré que cette approximation est de bonne qualité et qu'elle permet de calculer la houle même si le fond est localement assez pentu.

En plus des variations de profondeur, la présence d'un courant moyen peut affecter la propagation des vagues. La relation de dispersion (1.37) s'exprime à l'aide de la pulsation corrigée :

$$\sigma^2 = gk \tanh(k\bar{h}) \quad (1.54)$$

avec

$$\sigma = \omega - k_i \bar{u}_i \quad (1.55)$$

A partir de la méthode des échelles multiples, l'introduction du petit paramètre (1.50) permet à Kirby et Dalrymple (1983) de paraboliser l'équation (1.53), [71], et de prendre en compte les effets de dispersion non-linéaires.

#### **d. dissipation**

D'une manière générale, la dissipation se produit dans les zones de cisaillement du fluide. La couche limite au fond et la surface libre sont donc principalement concernées. La porosité du sable peut également introduire des effets dissipatifs sur la houle.

Pour un fluide parfait, la dissipation d'énergie interne ou sur une paroi imperméable n'existe pas. Le phénomène de réfraction se traduit alors comme une conservation de l'énergie entre les rayons de propagation de la houle, tandis que le phénomène de diffraction permet de redistribuer de l'énergie des zones de forte densité énergétique vers les zones de faible densité énergétique. Dans les cas extrêmes de réfraction, le rapport entre la hauteur de la houle et la profondeur d'eau  $\gamma = \frac{H}{h}$  dépasse le critère de déferlement  $\gamma_d$ . La vague déferle et sa taille s'en trouve limitée.

Le déferlement est un processus fortement dissipatif. Dans la zone de surf, une partie de l'énergie des vagues est transformée en courant moyen tandis qu'une autre partie est dissipée par viscosité dans les structures tourbillonnaires.

La dissipation intervient comme un terme puits dans l'équation d'évolution de la hauteur des vagues. On peut illustrer la décroissance "exponentielle" de la hauteur des vagues dans un cas simple:

$$\frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\chi}{2c_g} H = 0 \quad (1.56)$$

où  $\chi$  est le facteur de dissipation des vagues. Comme l'énergie des vagues se déplace à la vitesse de groupe  $c_g$ , on peut interpréter le rapport  $\frac{2c_g}{\chi}$  dans (1.56) comme une distance caractéristique dans la dissipation des vagues.

Suite aux travaux de Dally (1985), [30], Kirby et Dalrymple (1994), [72], ont montré que le facteur de dissipation lié au déferlement pouvait être modélisé par:

$$\chi = \frac{K_1 c_g (1 - (K_2/\gamma)^2)}{h} \quad (1.57)$$

où les constantes empiriques  $K_1 = 0.017$  et  $K_2 = 0.4$  permettent de prédire assez précisément la hauteur des vagues dans la zone de surf avec le critère de déferlement  $\gamma_d = 0.78$ . Un des avantages de cette méthode est de permettre l'arrêt du déferlement dans les zones profondes puis sa reprise lorsque la hauteur d'eau est plus faible. Cette gestion du déferlement est particulièrement bien adaptée pour les plages à barres.

La propagation des vagues sur des bathymétries irrégulières fait intervenir de nombreux mécanismes (réfraction, diffraction, dissipation) qui peuvent interagir fortement entre eux. Le modèle de houle REF/DIF 1 décrit par Kirby et Dalrymple (1994), [72], est basé sur la théorie des écoulements potentiels en profondeur faiblement variable. Dans ce cas, le modèle elliptique proposé par Berkhoff est étendu pour des faibles non-linéarités, mais dégradé sous sa forme parabolique. Cette approximation restreint la direction de propagation des ondes à un cône de  $\pm 60^\circ$  et ne permet pas de représenter les ondes réfléchies. L'adaptation du modèle en coordonnées curviligne permettrait de profiter davantage de sa parabolisation en anticipant les directions de propagation privilégiées.

### 1.3.3 Modélisation de la diffusion latérale des courants moyens

Il faut garder à l'esprit que la dissipation des courants moyens est faible. C'est le modèle de houle qui contrôle la majorité de la dissipation de l'énergie de l'écoulement en paramétrant le déferlement des vagues. Slinn et al. (1998), [119], montrent à l'aide de la simulation instationnaire des équations de Saint-Venant que le courant longitudinal induit par les vagues est le siège d'instabilités de cisaillement (voir annexe A). Le cisaillement des courants moyens génère des tourbillons. Pour les "filtrer", et ne conserver qu'une représentation moyenne des courants compatible avec l'échelle de temps morphodynamique, on introduit un modèle de mélange latéral.

Par analogie avec le tenseur des contraintes de Reynolds, on introduit un coefficient de mélange de la quantité de mouvement  $K_m$ . On pose alors que la dissipation est directement

exprimée en fonction des variations du courant moyen:

$$\bar{T}_{ij} = \rho K_m \bar{h} \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \quad (1.58)$$

La théorie de Bowen (1969), [18], repose sur une viscosité turbulente constante à l'intérieur et à l'extérieur de la zone de surf. Longuet-Higgins (1970), [80], a proposé de redéfinir la viscosité turbulente en fonction d'une échelle des vitesses turbulentes et d'une longueur de mélange adaptée. L'échelle des vitesses turbulentes horizontales est supposée être de l'ordre du dixième de la vitesse des vagues en milieu peu profond et la longueur de mélange horizontale  $L_t$  est supposée être proportionnelle à la distance entre la ligne d'eau et le point concerné:

$$K_m = N (g\bar{h})^{\frac{1}{2}} L_t \quad (1.59)$$

où le coefficient  $N \leq 0.016$ .

Même si le coefficient d'échange de quantité de mouvement horizontale  $K_m$  reste assez mal connu, la paramétrisation de la dissipation par le terme de mélange latéral est un élément important dans la modélisation des courants de dérive.

Longuet-Higgins (1970), [80], a mis en évidence le nombre  $P$  pour analyser les effets de la dissipation latérale dans la modélisation des courants de dérive:

$$P = \frac{\pi N \tan \beta}{\gamma C_f},$$

où  $N$  est le coefficient de pondération de la viscosité turbulente,  $\tan \beta$  la pente de la plage,  $\gamma$  est le rapport de la hauteur des vagues sur la profondeur et  $C_f$  est le coefficient de frottement sur le fond. Ce nombre  $P$  traduit le rapport des effets de la dissipation latérale sur les effets du frottement sur le fond. Lorsque le paramètre  $P$  est nul, le courant n'est pas dissipé latéralement.

On montre sur la figure (1.6) les effets de la dissipation sur un profil de courant longitudinal sur une plage plane. Dans cet exemple, le courant est forcé par des tensions de radiation discontinues. En absence de dissipation latérale la discontinuité du courant longitudinal à la ligne de déferlement n'est pas physiquement réaliste. Au lieu de laisser l'écoulement se déstabiliser localement, la dissipation latérale lisse les variations brutales du courant.

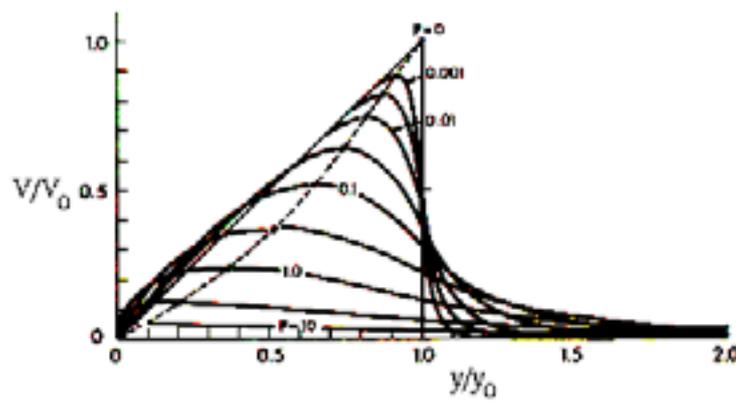


Figure 1.6 : Profil théorique du courant longitudinal en fonction du paramètre de mélange latéral  $P = \frac{\pi N \tan \beta}{\gamma C_f}$ , où  $y_0$  est la position de la la vitesse maximum du courant  $V_0$  en absence de dissipation latérale; selon Longuet-Higgins (1970), [80].

## 1.4 Conclusion

La géométrie de l'écoulement sur la plage permet de considérer le milieu comme peu profond. De ce fait, on peut considérer une faible variabilité verticale des vitesses de l'écoulement, et obtenir un modèle de courant 2DH intégré sur la verticale et moyenné sur la période des vagues. Ce modèle s'apparente aux équations de Saint-Venant utilisées en hydraulique fluviale, toutefois il est étendu à l'océanographie littorale pour tenir compte de l'effet moteur des vagues.

Le forçage du courant moyen par la houle est modélisé par les contraintes de radiation et nécessite de connaître le champ de houle. L'exploitation du modèle de houle REF-DIF permet de déterminer la hauteur et la direction des vagues. Ce modèle basé sur la théorie des écoulements potentiels permet de prendre en compte les effets de réfraction et diffraction des ondes pour des fonds lentement variables. La décroissance des vagues par déferlement sur la plage est également paramétrée.

La modélisation des courants moyens permet ainsi de traiter les écoulements forcés par la houle à une échelle de temps supérieure à celle de la vague.

# Chapitre 2

## Dynamique sédimentaire

### 2.1 Introduction

Les processus hydro-sédimentaires en milieu littoral sont assez complexes et difficiles à traiter. Les vagues, le courant et le transport sédimentaire sont mutuellement dépendants et interagissent pour façonner la plage à des échelles de temps et d'espace très variées. La figure 2.1 illustre quelques exemples de formes sédimentaires sous marines observées en présence de houle et de courant. Sous l'action des vagues et des courants, le sable est arraché du fond, transporté par l'écoulement puis redéposé en permanence. Soumis à cette forte activité hydrodynamique, la plage change de forme. Comme les vagues entrent dans un milieu de moins en moins profond, l'influence du fond altère leurs propriétés cinématiques et dynamiques. De même, les courants moyens principalement induits par ces vagues, sont directement influencés par la forme du fond.

Dans ce chapitre, on présente la modélisation de la dynamique sédimentaire à moyen terme. On montre que le bilan spatial des flux de sédiment permet de distinguer les zones en érosion ou en accrétion et d'obtenir la variation de la cote du fond au cours du temps. L'objectif de la simulation morphodynamique à moyen terme oriente le choix de la modélisation du transport sédimentaire vers des formules de transport total prenant en compte l'action combinée de la houle et du courant. La distinction des échelles de temps entre les processus hydrodynamiques et la dynamique sédimentaire permet également de

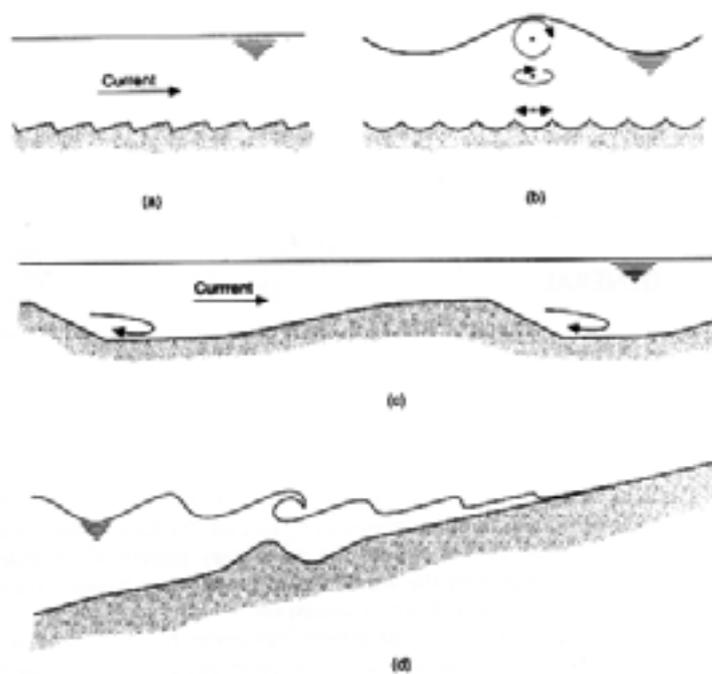


Figure 2.1 : Exemples de formes sédimentaires: (a) ride de courant, (b) rides de vagues, (c) ondes de sable/ dunes, (d) barre de déferlement; selon Soulsby (1997), [122].

proposer un modèle morphodynamique bien adapté au problème basé sur le couplage du modèle de courant moyen induit par la houle et de la loi de conservation du sédiment.

Ensuite, on présente rapidement les processus de formation des corps sédimentaires identifiés par les modèles morphodynamiques.

Enfin, on construit l'équation des ondes de sable non-linéaires à partir du modèle morphodynamique couplé. Celle-ci se base sur la décomposition de l'équation de conservation du sédiment en fonction de la formulation du transport sédimentaire. Elle s'appuie également sur l'équation de l'énergie de l'écoulement issue du modèle de courant moyen. Ce modèle permet alors de mieux comprendre l'influence du modèle hydrodynamique sur la dynamique des corps sableux sous l'hypothèse que le nombre de Froude de l'écoulement est petit devant 1.

## 2.2 Modélisation du transport sédimentaire

On distingue trois processus majeurs dans la dynamique générale des sédiments illustrés par la figure 2.2: l'arrachement des sédiments immobiles, le transport des sédiments et la déposition.

### 2.2.1 Mécanismes du transport sédimentaire

Une fois mobilisées par l'écoulement, les particules sédimentaires peuvent être transportées de différentes façons. Le transport par charriage déplace les particules directement sur le fond. C'est le mode de transport dominant lorsque l'écoulement est lent ou que les grains sont lourds. Lorsque le courant est plus important ou que les vagues sont puissantes, les grains sont transportés par l'écoulement dans toute la colonne d'eau. Après avoir été mobilisées et transportées, les particules peuvent sédimenter et se (re)déposer sur le fond. Le mécanisme de déposition apparaît lorsque les grains ne sont plus mobilisés par le charriage ou bien qu'ils sédimenter et sortent de la suspension. La plupart du temps, l'entraînement de grains vers la suspension et la sédimentation sont des processus simultanés. La déposition est donc directement contrôlée par les mécanismes de suspension.

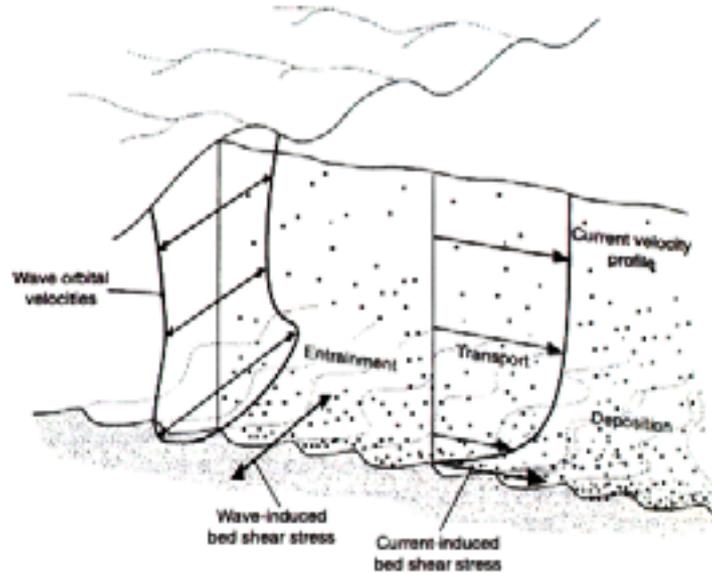


Figure 2.2 : Illustration des processus de transport sédimentaire; selon Soulsby (1997), [122].

### Seuil de mise en mouvement

Shields a mis en évidence un mécanisme d'arrachement des sédiments qui apparaît lorsque la contrainte de cisaillement exercée par l'écoulement sur le fond devient supérieure à un seuil critique:

$$\theta = \frac{\tau_{max}^f}{\rho g(s-1)} \geq \theta_{cr}$$

où  $\theta$  est le nombre de Shield et  $\theta_{cr}$  est le nombre de Shield critique.  $g$  est la gravité,  $s = \rho_s/\rho$  est le rapport de la masse volumique des particules sur celle de la phase fluide (eau) et  $\tau_{max}^f$  est la contrainte de cisaillement maximum au fond définie dans l'annexe B. En dessous de ce seuil le sédiment reste immobile sur le fond.

A partir de mesures expérimentales sur fond plat, en présence de courant seul, de houle seule et pour un écoulement combiné, Soulsby et Whitehouse (1997), [124], ont paramétré le seuil de mise en mouvement en fonction de la contrainte de cisaillement au fond et du diamètre du grain:

$$\theta_{cr0} = \frac{0.24}{D_*} + 0.055 (1 - \exp(-0.02D_*))$$

avec

$$D_* = \left[ \frac{g(s-1)}{\nu^2} \right]^{1/3} d_{50}$$

où  $d_{50}$  est le diamètre moyen des particules pour lequel 50% des grains en masse ont un diamètre plus petit que  $d_{50}$ .

Cependant en plus des forces de cisaillement induites par l'écoulement sur le fond, les forces de pesanteur interviennent dans l'équilibre des grains ( Hamm et al (1994), [61]; Soulsby (1997), [122]). La contrainte de cisaillement critique  $\theta_{cr\beta}$  sur un fond de pente  $\beta$ , avec une direction d'écoulement  $\Psi$  (figure 2.3) peut être modélisée par:

$$\theta_{cr\beta} = \theta_{cr0} \frac{\cos \Psi \sin \beta + (\cos^2 \beta \tan^2 \varphi - \sin^2 \Psi \sin^2 \beta)^{1/2}}{\tan \varphi}$$

où  $\varphi \approx 32^\circ$  est l'angle de frottement interne au sédiment. Cet angle de frottement intervient également pour limiter la pente du fond, car au delà d'une certaine cambrure de la forme sédimentaire, il se produit une avalanche pour rétablir l'équilibre. En absence d'écoulement, il peut donc se produire un transport sédimentaire purement gravitaire.

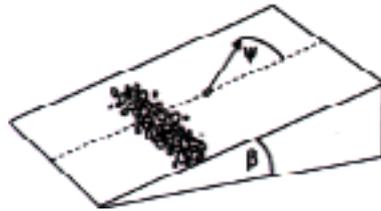


Figure 2.3 : Schéma général d'un écoulement de direction  $\Psi$  sur un fond de pente  $\beta$ ; selon Soulsby (1997), [122].

Ces effets gravitaires ont conduit les modélisateurs à introduire la notion "d'effet de pente". L'effet de pente est pris en compte, (i) soit en modifiant la contrainte critique de mise en mouvement des sédiments, (ii) soit en modifiant directement le flux de sédiment obtenu sur fond plat en fonction de la pente du fond. Le flux de sédiment total associé peut alors s'exprimer de deux façons:

$$Q_t = Q_t(\theta_{cr\beta}) \quad \text{ou} \quad Q_t = Q_t(\theta_{cr0})(1 - \epsilon \tan \beta)$$

La première formulation exprime le transport de manière rigoureuse en fonction d'une paramétrisation physique. Dans le second cas,  $\epsilon$  est un paramètre assez mal connu qui peut entraîner une très forte diffusion de la forme des corps sédimentaires (De Vriend [36], [37];

Cayocca [24], [25]). Par conséquent, même si la technique de diffusion est plus rapide pour estimer le transport sédimentaire, il est préférable de ne pas rajouter la correction  $\epsilon$  si elle n'a pas été calibrée expérimentalement avant. Par exemple, on verra dans le paragraphe 2.2.3 que la formule de transport proposée par Bailard prend en compte directement l'effet de pente, alors qu'il est plus grossièrement introduit dans celle de Soulsby-Van Rijn.

### Seuil de mise en suspension

En général, lorsque le seuil de mise en suspension est dépassé, la quantité de sédiment transportée en suspension est très supérieure à celle qui est charriée. Il est donc important de bien représenter cette transition.

Les particules sont mises en suspension lorsque la vitesse de fluctuation turbulente au fond ( $\approx$  vitesse de frottement  $U^*$ ) est supérieure à la vitesse de chute des particules solides ( $w_s$ ):

$$U^* \geq w_s$$

De nombreux auteurs fournissent des formulations pour estimer  $w_s$ . Van Rijn (1990), [142], rappelle que la vitesse de chute est atteinte lorsque la particule est en équilibre sous l'action des forces de gravité et de traînée visqueuse. Soulsby (1997), [122], s'appuie sur de nombreuses mesures expérimentales pour optimiser les coefficients d'une formulation simple de  $w_s$ . Ainsi, la vitesse de chute pour des formes de particules naturelles est estimée par:

$$w_s = \frac{\nu}{d_{50}} [(10.36^2 + 1.049(1 - C)^{4.7} D_*^3)^{0.5} - 10.36]$$

La concentration en particules  $C$  introduit une modification de la vitesse de chute, cependant cette correction n'est nécessaire qu'au voisinage du fond, lorsque  $C > 5\%$ .

La vitesse de frottement est définie en fonction de la contrainte au fond  $\tau^f$ :

$$\tau^f = \rho(U^*)^2$$

L'estimation de  $U^*$  se révèle difficile à rattacher aux grandeurs moyennes de l'écoulement lorsque celui-ci est contrôlé par le mouvement combiné des vagues et des courants. Actuellement, les méthodes les plus avancées permettent de décrire finement la couche limite de l'écoulement turbulent (Davies et al. (1997), [31]). Cependant cette approche est inadaptée pour la morphodynamique à moyen terme car trop coûteuse en temps de calcul. On exploite alors une estimation de la contrainte au fond obtenue par Soulsby et al. (1993),

[123]. La contrainte moyenne ( $\tau_m$ ) et la contrainte maximum sur un cycle de vague ( $\tau_{max}$ ) sont présentées dans l'annexe B.

### 2.2.2 Loi de conservation du sédiment

A l'échelle millimétrique, il est possible de décrire le mouvement des particules sédimentaires en résolvant de façon couplée le principe fondamental de la dynamique newtonienne appliqué à chaque particule et les équations de Navier-Stokes pour la phase fluide. Cependant dans le cadre de cette thèse, on s'intéresse à une échelle moyenne et le fond est considéré comme une interface imperméable entre deux milieux continus. De ce fait et par conservation de la masse de sédiment. L'évolution de la forme du fond est directement soumise à l'équation de continuité et donc au bilan des flux de sédiment engendré par l'écoulement.

Pour établir la loi qui gouverne l'évolution de la forme du fond, on considère le volume  $\Omega$  de hauteur  $Z_f$  et de largeur  $dx$  illustré sur la figure 2.4. Sur cette représentation schématique,  $Q_b$  est le flux volumique de sédiments charriés sur le fond par unité de largeur, alors que  $E$  et  $D$  sont les flux volumiques de sédiments mis en suspension et déposés sur le fond par unité de largeur.

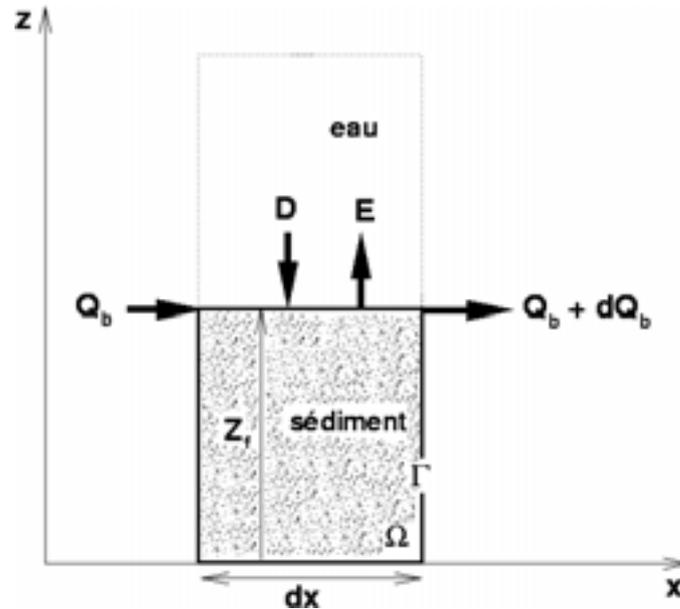


Figure 2.4 : Schéma de définition 1D des flux de sédiment à travers l'interface eau-sédiment.

Pour un milieu continu, l'équation de continuité exprime que pour un volume de fluide ( $\Omega$ ), fixe, sa variation de masse ( $m$ ) au cours du temps est égale à la densité de flux de masse ( $\vec{Q}_m$ ) traversant la surface  $\Gamma$  qui délimite  $\Omega$ :

$$\frac{\partial m}{\partial t} + \oint_{\Gamma} \vec{Q}_m \cdot \vec{n} ds = 0 \quad (2.1)$$

où  $\vec{n}$  est la normale à la surface  $\Gamma$ .

La masse  $m$  de sédiment sec contenu dans  $\Omega$  est définie par:

$$m = (1 - p)\rho_s Z_f dx$$

où  $p$  est la porosité du sédiment. Pour un sédiment uniforme, la variation de masse au cours du temps est alors directement déterminée en fonction de la cote du fond:

$$\frac{\partial m}{\partial t} = (1 - p)\rho_s \frac{\partial Z_f}{\partial t} dx$$

Le bilan des flux de masse à travers  $\Gamma$  résulte du bilan horizontal du transport par charriage et du bilan vertical du transport en suspension (dépôt moins érosion):

$$\oint_{\Omega} \vec{Q}_m \cdot \vec{n} ds = \rho_s \frac{\partial Q_b}{\partial x} dx + \rho_s D dx - \rho_s E dx$$

D'après la relation de continuité (2.1), on obtient la loi de conservation de la masse pour les particules solides, également connue sous le nom de relation d'Exner (1925), [47]:

$$\frac{\partial Z_f}{\partial t} + \frac{1}{1 - p} \left( \frac{\partial Q_b}{\partial x} + (D - E) \right) = 0$$

La description globale du transport sédimentaire, sans distinction directe entre charriage et suspension permet d'écrire la loi de conservation du sédiment en 2D suivante:

$$\frac{\partial Z_f}{\partial t} + \frac{1}{1 - p} \vec{\nabla} \cdot \vec{Q}_t = 0 \quad (2.2)$$

où  $\vec{Q}_t$  est le flux volumique total de sédiments par unité de largeur et s'exprime en  $m^3 \cdot s^{-1} \cdot m^{-1}$ . Dans la partie suivante, on précise comment estimer les flux de sédiment et en particulier le flux total  $\vec{Q}_t$ .

### 2.2.3 Paramétrisation du transport sédimentaire

Actuellement, aucune formulation n'est véritablement établie et applicable de manière universelle pour déterminer la quantité de sédiment transportée. Néanmoins, sur les plages

soumises à la houle, le transport sédimentaire est principalement contrôlé par le courant moyen et par la vitesse orbitale induite par la houle. Horikawa (1988), [64], Van Rijn (1990), [142], ou encore Soulsby (1997), [122], ont rassemblé une large palette de formules disponibles pour estimer les flux sédimentaires localement à partir des conditions hydrodynamiques locales.

### Différentes approches pour déterminer le transport sédimentaire

Des approches probabilistes comme celle d'Einstein (1950), [44], ou celle basées sur des concentrations de particules pour Bagnold (1954), [7], sont utilisées pour estimer le transport sédimentaire. De même, Nielsen (1992), [93], distingue l'approche par trajectoire de particules de l'approche par concentration intégrée (la deuxième approche est la plus souvent retenue).

Dans le cadre du programme MAST G6, Zyserman et al. (1991), [152], présentent une discussion sur les limites d'application des principaux modèles de transport sédimentaire utilisables pour la morphodynamique côtière. Ils distinguent ainsi trois grandes classes de modèles: (i) paramétriques, (ii) déterministes et (iii) énergétiques.

Les travaux d'Arcilla et al. (1988), [4], sont représentatifs de l'approche paramétrique. La dérive littorale (transport longitudinal intégré à travers la zone de déferlement) est estimée en fonction d'un paramètre de similitude de la zone de surf qui prend en compte la pente moyenne de la plage, la longueur d'onde des vagues au large et leur hauteur au déferlement. La dérive littorale est également estimée avec l'approche énergétique par la formule du CERC (1984), [5], en fonction du flux d'énergie des vagues. Ces formulations ne prennent pas en compte les caractéristiques du sédiment ( $d_{50}$ ,  $w_s$ ) et s'avèrent trop globales pour décrire le mouvement des bancs de sable sur la plage.

Des modèles déterministes basés sur la description verticale du profil de vitesse et de concentration sont proposés par Deigaard et al. (1986), [40], [39], Fredsoe et al. (1985), [51], Davies et al. (1997), [31]. Pour réduire le problème 3D en 2DH, Wang (1992), [147], propose une généralisation du modèle intégré sur la verticale du transport en suspension basé sur les travaux de Galappatti et Vreugdenhil (1985), [54]. Le flux de sédiment total est estimé localement à partir de la somme du flux de sédiment charrié et du bilan vertical du flux de sédiment en suspension. L'obtention des flux moyens (sur une période de vague) sont soumis à la connaissance des fluctuations de vitesse et de concentration autour de leurs valeurs moyennes. Ces approches permettent de prendre en compte l'essentiel des

processus de transport, mais elles nécessitent une trop grande finesse de représentation de la couche limite et des processus turbulents dans la zone de surf pour être directement applicables à la morphodynamique littorale.

On montre ainsi que la paramétrisation du transport est particulièrement délicate, et qu'il reste de nombreuses recherches à mener et de modèles à proposer dont les échelles sont compatibles avec les applications morphodynamiques 2DH.

### Formule Bailard

Par une comparaison numérique, Camenen et al. (2000), [21], mettent en évidence la sensibilité de quatre formules de transport employées en milieu littoral (Engelund-Hansen, Bijker, Bailard et Dibajnia-Watanabe) à leurs paramètres respectifs. Actuellement, la méthode de Bailard (1981), [8], semble la mieux adaptée pour déterminer le transport sédimentaire total dans la zone de surf. Celle-ci est basée sur l'idée que l'énergie dépensée par l'écoulement pour transporter le sédiment est directement proportionnelle à l'énergie totale dissipée dans l'écoulement. Cette formule de transport sédimentaire total permet ainsi de distinguer le transport en suspension ( $Q_s$ ), le charriage ( $Q_b$ ) et l'effet de pente ( $Q_\beta$ ) en fonction de la vitesse instantanée de l'écoulement à proximité du fond ( $U_f$ ):

$$\vec{Q}_t = \vec{Q}_{b0} + \vec{Q}_{b\beta} + \vec{Q}_{s0} + \vec{Q}_{s\beta} \quad (2.3)$$

avec

$$\begin{aligned} \vec{Q}_{b0} &= \frac{\epsilon_b C_f}{g(s-1) \tan \varphi} \overline{\|U_f\|^2 \vec{U}_f} \\ \vec{Q}_{b\beta} &= -\frac{\epsilon_b C_f}{g(s-1) \tan^2 \varphi} \overline{\|U_f\|^3} \vec{\nabla}(Z_f) \\ \vec{Q}_{s0} &= \frac{\epsilon_s C_f}{g(s-1) w_s} \overline{\|U_f\|^3 \vec{U}_f} \\ \vec{Q}_{s\beta} &= -\frac{\epsilon_s^2 C_f}{g(s-1) w_s^2} \overline{\|U_f\|^5} \vec{\nabla}(Z_f) \end{aligned}$$

où  $\epsilon_b \approx 0.1$  et  $\epsilon_s \approx 0.02$  sont les facteurs d'efficacité du transport par charriage et en suspension.

Une difficulté d'exploitation de la formule de Bailard est de choisir une vitesse d'écoulement au fond représentative. Ici, on suppose qu'elle est donnée par:

$$\vec{U}_f(t) = \vec{U} + \vec{U}_w(t)$$

où le courant moyen  $\vec{U}$  et la vitesse orbitale au fond  $\vec{U}_w$  pour une houle de période  $T = 2\pi/\omega$  sont issus du modèle hydrodynamique 2DH.

La vitesse orbitale au fond, déduite de la théorie de la houle linéaire, est donnée par:

$$U_w(t) = U_w \cdot \cos(\omega t) \text{ avec } U_w = \frac{2\pi A_w}{T \sinh(kh)} \quad (2.4)$$

où  $A_w = H_w/2$  est la demi-amplitude des vagues. Toutefois, cette formulation ne permet pas de prendre en compte l'asymétrie de la houle. Pour y remédier, en particulier lorsque le courant moyen est faible devant la vitesse orbitale de la houle, on peut supposer que la couche limite des vagues n'est contrôlée que par le seul mouvement des vagues. Fredsoe et Deigaard (1992), [52], paramétrisent alors la vitesse orbitale au fond de la manière suivante:

$$U_w(t) = U_{w1} \cdot \cos(\omega t) + U_{w2} \quad (2.5)$$

où  $U_{w1}$  représente l'amplitude de la vitesse orbitale, et  $U_{w2}$  correspond à une composante moyenne continue due à la dissymétrie de l'onde.

Pour déterminer les valeurs  $U_{w1}$  et  $U_{w2}$ , il suffit de connaître les vitesses orbitales maximale ( $U_{wc}$ ) et minimale ( $U_{wt}$ ) situées respectivement sous la crête et dans le creux des vagues. On en déduit alors:

$$U_{w1} = \frac{U_{wc} + U_{wt}}{2} \quad \text{et} \quad U_{w2} = \frac{U_{wc} - U_{wt}}{2}$$

Van Rijn (1990), [142], donne une estimation des vitesses orbitales  $U_{wc}$  et  $U_{wt}$  en milieu profond :

$$U_{wc} = \frac{2\pi A_{wc}}{T \cdot \sinh(k(h + A_{wc}))} \quad \text{et} \quad U_{wt} = \frac{2\pi A_{wt}}{T \cdot \sinh(kh)}$$

où  $A_{wc}$  et  $A_{wt}$  sont les hauteurs de vagues au dessus et en dessous du niveau d'eau moyen. En première approximation, on peut choisir  $A_{wc} = A_{wt} = A_w$

Le courant moyen  $U_{w2}$  ainsi défini (dirigé dans le sens de la houle), même s'il est faible, permet de représenter le transport sédimentaire induit par la houle asymétrique vers la plage.

Soulsby (1997), [122] propose une comparaison de cette méthode avec des données expérimentales et d'autres modèles. Une forte sensibilité est constatée en fonction du coefficient de frottement, et Soulsby conseille d'utiliser la définition du coefficient de frottement issu de la contrainte combinée houle et courant (B.31). Un inconvénient de cette

méthode est qu'elle ne s'exprime pas en fonction des quantités moyennes (seul  $\vec{Q}_{b0}$  peut être calculé analytiquement). Malgré la diversité des interprétations de cette formule, les résultats sont qualitativement en accord avec un facteur 5 par rapport aux autres modèles et un facteur 2 par rapport aux observations dans les conditions d'une zone de surf. Cette précision reste acceptable par rapport aux écarts communément rencontrés lorsque l'on applique des formules d'hydraulique fluviale en dehors de leur domaine d'utilisation.

La méthode de Bailard nécessite des intégrations temporelles sur une période de vague qui peuvent se révéler coûteuses pour les simulations numériques. Cependant, les comparaisons menées par Soulsby montrent que cette formulation est simple à mettre en oeuvre et aussi performante que des modèles plus complexes décrivant les couches limites. On utilise cette formule de transport pour la simulation morphodynamique des plages d'Aquitaine.

### 2.3 Couplage hydro-sédimentaire 2DH à moyen terme

Dans le chapitre 1, on a décrit un modèle de courant intégré sur la verticale et sur une période de vague; celui-ci permet de déterminer les courants moyens en milieu peu profond en présence de la houle et de la marée. Dans la première partie du chapitre 2, on a vu que l'évolution de la forme du fond est directement déduite de la répartition spatiale des flux de sédiment à partir de la loi de conservation de la masse du sédiment, et que ces flux sédimentaires pouvaient être estimés en fonction des variables hydrodynamiques par une formule de transport total. Le couplage direct de ces modèles permet alors de traiter les problèmes de morphodynamique des bancs sableux en milieu littoral en 2DH.

D'un point de vue général et sur la côte aquitaine en particulier, la dynamique des bancs de sable est beaucoup plus lente que l'hydrodynamique. Les échelles de temps des vagues ( $T_w \approx 10 \text{ s}$ ) et celle de la marée ( $T_t \approx 12 \text{ h}$ ) sont facilement identifiables. L'échelle de temps des courants moyens ( $T_c \approx 400 \text{ s}$ ) est inférieure à celle de la marée mais permet tout de même d'intégrer (ou filtrer) les phénomènes d'instabilité du courant de dérive. Concernant les corps sableux, après une tempête par exemple, on peut déterminer l'échelle de temps de la génération des bancs de sable ( $T_{sz} \approx 3 \text{ j}$ ). L'échelle de temps de leur migration le long de la plage ( $T_{sx} \approx 200 \text{ j}$ ) est quant à elle estimée par le rapport de l'échelle de vitesse ( $\approx 2 \text{ m/j}$ ) sur l'échelle spatiale de la bathymétrie ( $\approx 400 \text{ m}$ ). On en

déduit donc la hiérarchie suivante :

$$T_w \ll T_c \ll T_t \ll T_{sz} \ll T_{sx}$$

Cela signifie qu'il faut intégrer les effets de l'hydrodynamique sur une durée assez longue pour obtenir un transport sédimentaire suffisant et observer une évolution du fond significative. On définit cette durée d'intégration comme l'échelle de temps sédimentaire. Le choix d'un modèle hydrodynamique à l'échelle de temps sédimentaire est alors nécessaire pour décrire le couplage hydro-sédimentaire et obtenir l'évolution des corps sédimentaires à moyen terme.

Ici, comme dans la plupart des modèles morphodynamiques qui ne prennent pas en compte la marée, l'intégration des phénomènes hydrodynamiques rapides par rapport à  $T_s$  se traduit par la recherche d'une solution quasi-stationnaire des courants moyens (Falqués et al. (1996), [49]; de Vriend (1991), [34]; Deigaard et al. (1999), [38]). L'hypothèse des courants moyens quasi-stationnaires correspond à un état d'équilibre de l'écoulement sous l'action de différentes forces (inertie, action des vagues, frottement sur le fond, déformation de la surface libre et dissipation latérale). Cette hypothèse signifie également que les dérivées temporelles dans le modèle des courants moyens deviennent négligeables devant les autres termes. Ainsi lorsque les corps sédimentaires se déplacent, l'écoulement s'ajuste "instantanément" à la forme du fond. Le modèle morphodynamique s'appuie donc sur la résolution des équations suivantes:

$$\frac{\partial \bar{Q}_j}{\partial x_j} = 0 \quad (2.6)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\bar{Q}_i \bar{Q}_j}{\bar{h}} \right) + g \bar{h} \frac{\partial \bar{Z}_s}{\partial x_i} + C_f \|\vec{U}\| U_i + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{S}_{ij}}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( K_m \bar{h} \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \right) \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial Z_f}{\partial t} + \frac{1}{1-p} \vec{\nabla} \cdot \vec{Q}_t = 0 \quad (2.8)$$

Lorsque la marée joue un rôle moteur important, il faut définir une stratégie pour avoir une hydrodynamique représentative comme le préconisent Latteux (1987,1995), [75], [76], Devriend et al. (1993), [36], Cayocca (1996,2001), [24], [25].

Suite au couplage hydro-sédimentaire, des corps sédimentaires structurés peuvent apparaître. Ces instabilités morphodynamiques naissent d'une rétroaction constructive entre la croissance du banc de sable et la perturbation qu'il induit sur l'hydrodynamique environnante.

## 2.4 Formation des corps sédimentaires

Dans le passé, une large part des travaux en matière de morphodynamique sédimentaire a été orientée sur la compréhension des mécanismes de formation des dunes pour des applications au domaine fluvial (Parker (1976), [100]; Colombini et al. (1987), [28]; Sekine et Parker (1992), [117]; Schielen et al. (1993), [114]). Plus récemment en milieu marin, pour répondre aux problèmes de navigation dans les embouchures et de stabilité des constructions sous-marines (cables électriques, *pipelines*), des recherches se sont orientées plus significativement sur la dynamique des bancs de sable générés par la marée en milieu peu profond (de Vriend (1987,1991,1993,1994), [33], [32], [34], [36], [37], [35]; Hulscher et al. (1993), [65]; Wang et al. (1995), [148]; Schuttelaars et de Swart (1996,1999), [115], [116]; Gerkema (2000), [56]; Komarova et Newell (2000), [73]). Enfin, l'intérêt croissant pour la protection du littoral a encouragé les investigations sur la morphodynamique des plages à moyen terme (Trowbridge (1995), [139]; Falquès et al. (1996), [49], [48]; Deigaard et al (1999), [38]; Calvete et al. (2001),[20]).

### 2.4.1 Ondes de sable générées par un courant

Dans un premier temps, la confrontation de modèles morphodynamiques simples basés sur l'assimilation du fond avec une onde de sable (figure 2.5) et des expériences en canal rectiligne a mis en évidence l'importance du régime d'écoulement et du confinement latéral sur les formes sédimentaires observées sur le fond (dune, plat, anti-dune) (Kennedy (1963), [70]; Engelund (1970), [45]; Engelund et Fredsoe (1982), [46]). De même, les influences de la rugosité du fond et de la pente du fond ont été mises en avant par Richards (1980), [106], mais McLean (1990), [82], a montré que le rôle de l'effet de pente dans les instabilités du fond était négligeable devant le déphasage entre la contrainte de frottement et le flux de sédiment. Cette notion de déphasage a été confirmée par Ji et Mendoza (1997), [67]. De plus l'analyse de stabilité faiblement non-linéaire des modèles montre une meilleure corrélation avec les mesures que l'analyse linéaire. Cela souligne l'importance des non-linéarités dans les processus morphodynamiques.

Le modèle de courant de Saint-Venant est à la base de nombreuses simulations numériques de morphodynamiques fluviales. Il s'agit du modèle composé par les équations (2.6), (2.7) et (2.8), en absence du terme de froçage par les vagues. Les principaux phénomènes morphodynamiques à moyenne échelle et leur variabilité horizontale peuvent être

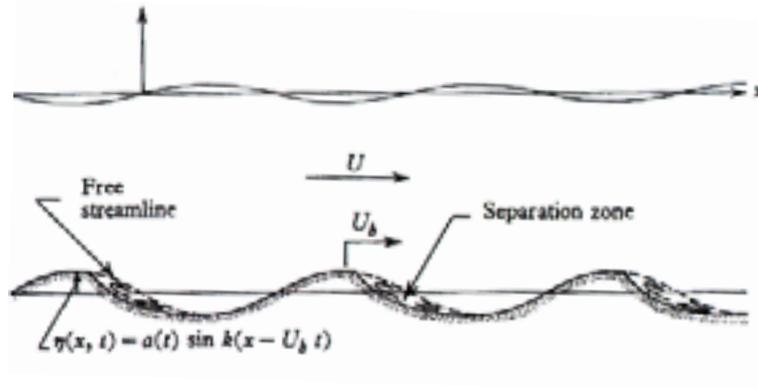


Figure 2.5 : Assimilation du fond sédimentaire avec une onde; selon Kennedy (1963), [70].

simulés avec ce modèle intégré sur la verticale. En couplant ce modèle avec une formule de transport total et la loi de conservation du sédiment, Colombini et al. (1987), [28], Schielen et al. (1993), [114], ont montré par une analyse de stabilité linéaire et faiblement non-linéaire que des dunes de sable périodiques peuvent être instables en fonction du rapport de la profondeur sur la largeur du canal. Le caractère non-linéaire de ces ondes de sable favorise alors la formation de dunes asymétriques (figure 2.6).

### 2.4.2 Principaux processus d'instabilités des plages sableuses

La morphodynamique des plages de sables diffère de la morphodynamique en milieu fluvial à cause de la pente moyenne du fond mais surtout par le forçage des courants induit par les vagues. Les corps sédimentaires observés dans le milieu naturel (barres pré littorales, systèmes de barres et de baïnes) peuvent être reproduit ou approchés qualitativement par le modèle morphodynamique 2DH composé des lois de conservation (2.6), (2.7) et (2.8).

L'analyse des processus transversaux à la plage permet d'identifier le courant de retour comme le principal responsable de la formation des barres longitudinales. Même si ces mécanismes sont préférentiellement étudiés avec des modèles prenant en compte la variabilité verticale des courants comme ceux de Svendsen (1984), [127] ou de Deigaard et al. (1991), [42], le modèle morphodynamique 2DH permet d'obtenir le courant de retour et donc ces effets sur la dynamique sédimentaire.

D'autre part, deux études de modélisation récentes permettent d'expliquer la naissance de bancs de sable structurés sur des plages et leur variabilité longitudinale, (i) à cause de

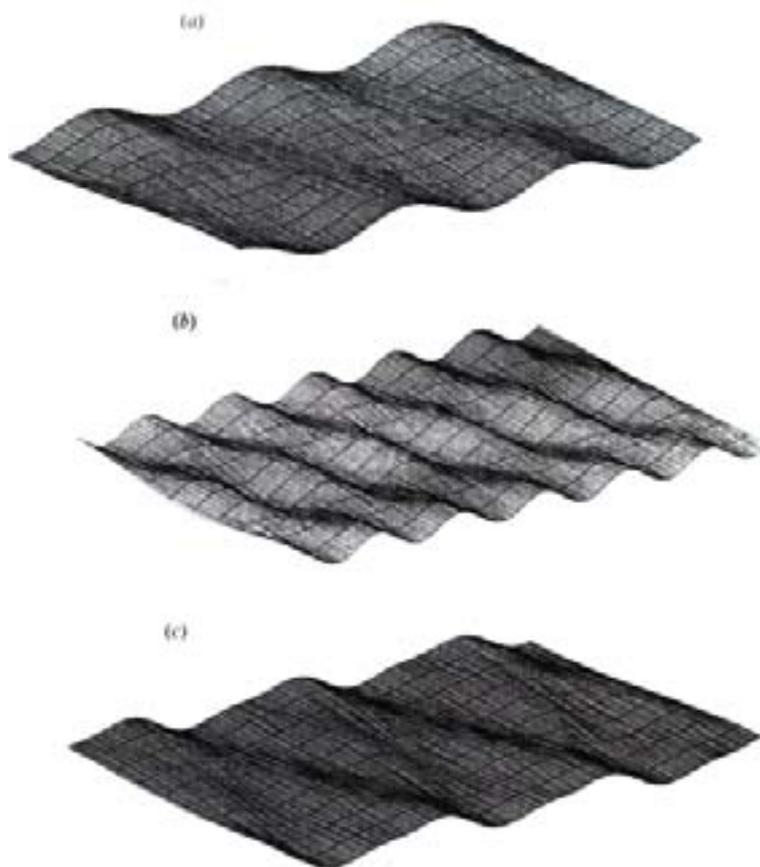


Figure 2.6 : Forme du fond approchée : (a) au premier ordre (linéaire), (b) au deuxième ordre et (c) superposition des deux premiers modes ; selon Schielen et al. (1993), [114].

l'effet du frottement qui introduit un déphasage entre la déviation du courant et la forme du corps sédimentaire qui la provoque, et (ii) l'effet des irrégularités du déferlement qui conduit à des recirculations du courant.

### Effet du courant de retour sur la formation des barres

Les observations montrent que le transport sédimentaire est beaucoup plus faible en dehors de la zone de surf que dans la zone de déferlement. Fredsoe et Deigaard (1992), [52], insistent sur le fait que le transport sédimentaire en dehors de la zone de surf est dû à un charriage résiduel vers la plage contrôlé par l'asymétrie de la houle. Par contre, la forte agitation engendrée par le déferlement des vagues se traduit par un important transport en suspension dans la zone de surf contrôlé par le courant de retour vers le large. Ce mécanisme hydro-sédimentaire transversal à la plage conduit à la formation d'une barre longitudinale (figure 2.7).

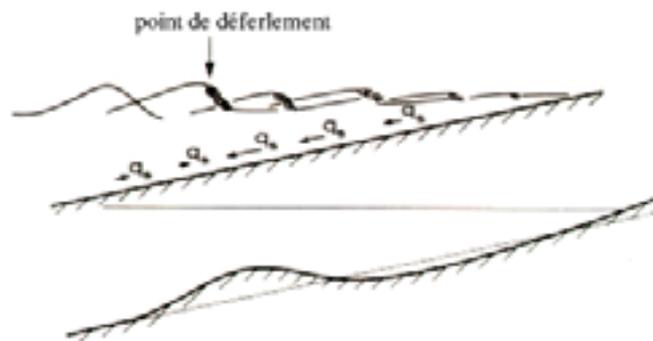


Figure 2.7 : Représentation de la formation d'une barre longitudinale sous le déferlement; selon Fredsoe et Deigaard (1992), [52].

### Instabilité des fonds sableux sous l'action du courant de dérive

Le courant de dérive intense générée par une houle d'incidence oblique interagit avec la plage et peut engendrer sa déformation. L'instabilité fond-courant décrite par Falqués et al. (1996), [48], se développe sur une plage soumise à un courant longitudinal. Le courant de dérive est imposé strictement parallèle à la plage pour modéliser l'équilibre entre les

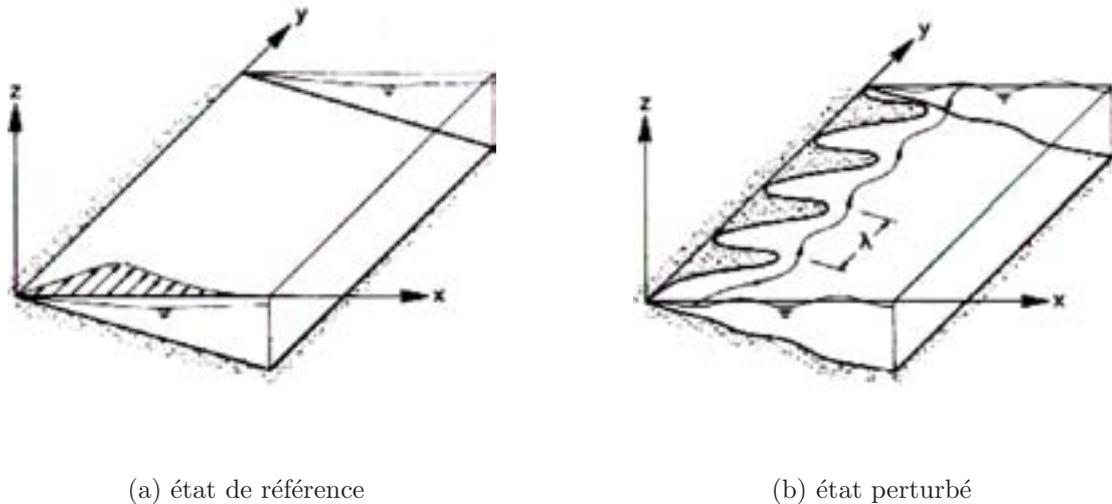


Figure 2.8 : Schéma de la plage plane et du courant; selon Falqués et al. (1996), [48].

tensions de radiation induites par les vagues incidentes et la diffusion latérale des courants, sans prendre en compte les processus transversaux comme le courant de retour ou le *set-up*. La figure 2.8a représente le courant longitudinal sur une plage plane tandis que la figure 2.8b représente la plage perturbée par des bancs de sable et la perturbation associée des lignes de courant. La figure 2.4.2 illustre la notion de déphasage entre l'écoulement et les bancs de sable. Le déphasage entre la présence d'un banc de sable immergé et la déformation de l'écoulement est dû principalement au frottement sur le fond (Engelund et al. (1982), [46]; McLean (1990), [82]). Le mécanisme physique de l'instabilité s'interprète ici de la même façon, car le décalage présent entre la forme du fond et la déviation du courant introduit un décalage entre la divergence du flux de sédiment et la forme du corps sédimentaire. Les instabilités obtenues sur la plage, illustrées sur les figures 2.10, sont plus ou moins complexes en fonction des modes instables dominants.

### Instabilité des barres de déferlement

L'instabilité fond-courant est indissociable de l'instabilité fond-vagues décrite par Deigaard et al. (1999), [38]. Ces derniers proposent une analyse de stabilité d'une barre rectiligne parallèle à la côte en présence des vagues et des courants induits. La bathymétrie utilisée dans cette étude est illustrée sur la figure 2.11. Dans le cas d'une houle

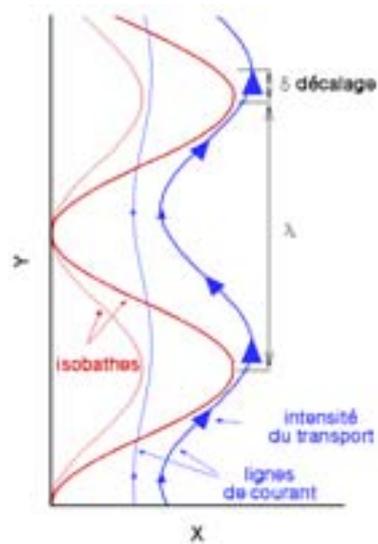


Figure 2.9 : Schématisation du déphasage entre le fond et le courant et donc le transport sédimentaire.

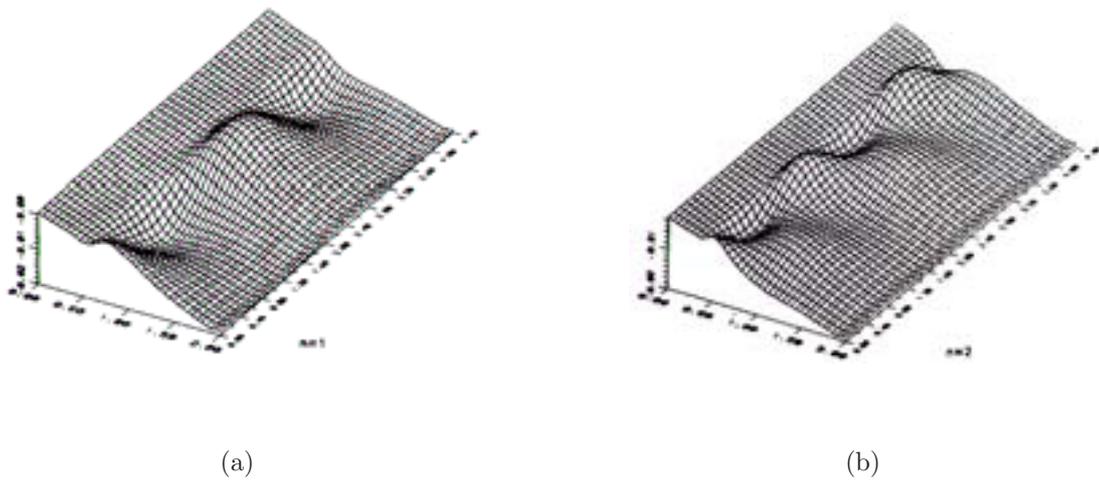


Figure 2.10 : Différents modes d'instabilités; selon Falqués et al. (1996), [48].

d'incidence normale, le champ de houle reste uniforme longitudinalement à la côte. Par contre transversalement à la côte, la houle gonfle et déferle sur la barre dans un premier temps puis sur le haut de plage. Ce gradient de tension de radiation normale à la côte est équilibré directement par les forces hydrostatiques ce qui se manifeste par la déformation de surface libre moyenne : *set-down* et *set-up*.

En perturbant la forme des barres, Deigaard et al. constatent que la houle se focalise davantage sur la crête des perturbations ce qui introduit une dépression plus importante de la surface libre au niveau des crêtes des perturbations tandis que la déformation de la surface libre moyenne est plus faible au niveau des creux que dans le cas de la barre non perturbée. Les auteurs en déduisent que la variation longitudinale du niveau moyen de la surface libre ne peut exister sans la présence d'un écoulement des niveaux hauts vers les niveaux bas. Ils expliquent ainsi que l'apparition de zone de recirculation du courant est due à la déformation de la surface libre. Ces courants induits par les forces de pression hydrostatique seraient amplifiés par l'augmentation de l'intensité du déferlement sur les bancs de sable les moins profonds. La figure 2.12 montre que l'eau est entraînée vers la plage par le déferlement sur la barre puis évacuée vers le large par des chenaux de vidange matérialisés par les creux entre les bancs de sable. Comme le transport sédimentaire est proportionnel à la profondeur d'eau, l'instabilité se développe. Les chenaux de vidange ont tendance à se creuser davantage alors que le sommet de la barre s'érode moins.

## 2.5 Modélisation mathématique des ondes de sable issue du couplage hydro-sédimentaire 2DH

Dans les sections précédentes, on a vu que le transport sédimentaire était fonction de l'activité hydrodynamique. Par conséquent, les mouvements du fond sont directement couplés à la dynamique des courants moyens et des instabilités peuvent apparaître. Le modèle morphodynamique 2DH basé sur les lois de conservation (2.6), (2.7) et (2.8) permet de simuler globalement les mouvements de la plage et de l'écoulement associé. Ici, on présente "l'équation des ondes de sable", basée sur une simplification du modèle morphodynamique global, permettant de mieux comprendre le caractère propagatif des structures sédimentaires et de mieux appréhender les effets de l'hydrodynamique sur l'évolution du

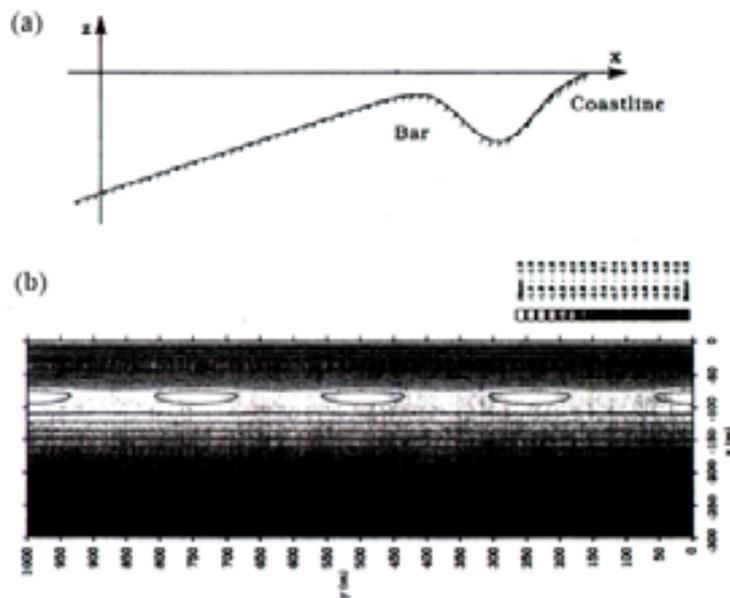


Figure 2.11 : Représentation du profil de la plage : (a) état de référence, (b) plage perturbée ; selon Deigaard (1999), [38].

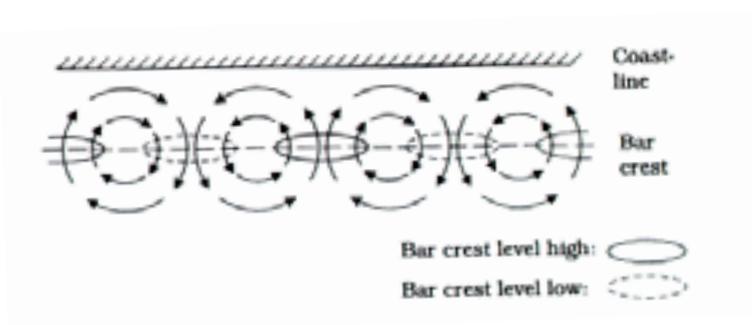


Figure 2.12 : Schéma des recirculations du courant induit par la perturbation de la barre longitudinale ; selon Deigaard (1999), [38].

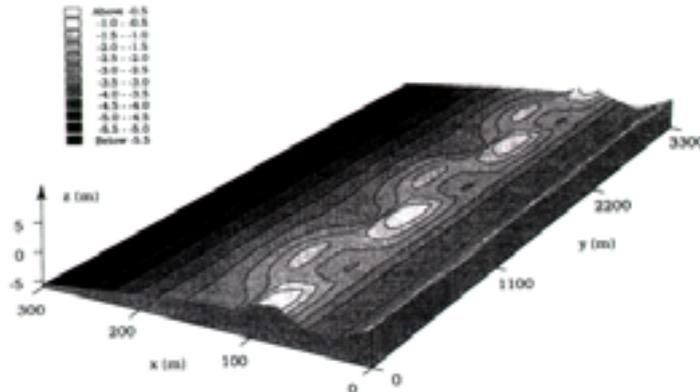


Figure 2.13 : Perturbation instable superposée à la bathymétrie de référence ; selon Deigaard (1999), [38].

fond.

On suppose que la direction du courant moyen est faiblement influencée par les vagues. Ainsi, dans l'équation de continuité du sédiment, le bilan des flux de sédiment est développé explicitement en fonction des variations spatiales des variables hydrodynamiques (débit  $Q$  et hauteur d'eau  $h$ ) et des paramètres caractérisant la sensibilité du transport sédimentaire à ces variables ( $\frac{\partial Q_s}{\partial Q}$  et  $\frac{\partial Q_s}{\partial h}$ ). Dans le cadre des écoulements 2DH à petit nombre de Froude (ou bien quel que soit le régime en 1DH), on est en mesure de reformuler de manière unique la loi de conservation du sédiment sous la forme d'une équation de transport qui met en avant la nature hyperbolique du modèle des ondes de sable (Saint-Cast et al. (2001), [112]).

### 2.5.1 Décomposition de la loi de conservation du sédiment

La décomposition suivante est une approche générale utilisable aussi bien en milieu fluvial qu'en milieu côtier, dès lors que les courants sont dominants par rapport à la houle. Pour simplifier les développements qui conduisent à la formulation du modèle des ondes de sable appliqué aux plages, on se place dans le cas d'un écoulement faiblement influencé par les apports de masse induits par la houle:

$$o(\vec{\vec{Q}}) \ll o(\vec{Q})$$

On néglige le courant de compensation devant le courant moyen qui ici est très voisin du courant au sens de Mei:

$$\vec{U} \approx \vec{U}_{Mei} = \frac{\vec{Q}}{h} \quad (2.9)$$

Par exemple, sur une plage plane avec de la houle oblique, cela revient à négliger le courant de retour devant le courant de dérive.

### Formulation du transport simplifiée

Suite à l'hypothèse (2.9), on considère que le transport sédimentaire s'effectue dans la direction du débit total et qu'il est fonction uniquement du débit total et de la hauteur d'eau:

$$\vec{Q}_t = Q_t(\bar{Q}, \bar{h}) \frac{\vec{Q}}{Q} \quad (2.10)$$

où  $\bar{Q} = \|\vec{Q}\|$ . Souvent, les formules de transport sont exprimées en fonction de la contrainte de cisaillement au fond. Ici, comme on néglige l'influence des vagues sur l'intensité du transport sédimentaire, cette contrainte au fond ne dépend que de la vitesse moyenne de l'écoulement. On utilise alors une écriture assez générale du transport sédimentaire de la forme:

$$Q_t = aU^b \quad (2.11)$$

Cette paramétrisation basée sur le couple de coefficients  $(a, b)$  permet de représenter toute une gamme de formules de transport (Van Rijn (1990), [142]). Par exemple pour la formule de Engelund-Hansen:

$$\begin{aligned} a &= \frac{0.05}{(s-1)^2 g^{0.5} d_{50} C^3} \\ b &= 5 \end{aligned}$$

où  $C = \sqrt{g/C_f}$  est le coefficient de Chézy.

### Reformulation et analyse dimensionnelle du bilan sédimentaire

Pour alléger les notations dans le modèle de courant moyen, on omet les barres sur les grandeurs moyennes. De plus, pour l'analyse dimensionnelle, on réécrit chaque variable

du problème ( $f$ ) comme le produit de son échelle représentative ( $f^*$ ) et de sa variation adimensionnée ( $f'$ ). L'ordre de grandeur de la variable ( $o(f)$ ) est alors donné par sa grandeur représentative ( $f^*$ ). On note:

$$f = f^* f' \quad \text{et} \quad o(f) = f^*$$

L'évolution du fond au cours du temps est donnée par l'équation de continuité du sédiment:

$$\frac{\partial Z_f}{\partial t} + \frac{1}{1-p} \vec{\nabla} \cdot \vec{Q}_t = 0 \quad (2.12)$$

D'après la formulation générale du transport sédimentaire (2.10), on développe le bilan spatial des flux de sédiment de la loi de conservation du sédiment (2.12) en fonction des bilans spatiaux de débit liquide total et de hauteur d'eau:

$$\frac{1}{1-p} \vec{\nabla} \cdot \vec{Q}_t = Q_t \left( T_Q \frac{\vec{Q}}{Q} \cdot \frac{\vec{\nabla}(Q)}{Q} + T_h \frac{\vec{Q}}{Q} \cdot \frac{\vec{\nabla}(h)}{h} \right) \quad (2.13)$$

où  $T_Q$  et  $T_h$  caractérisent la sensibilité du transport sédimentaire au débit total et à la hauteur d'eau. Celles-ci sont définies comme des paramètres sans dimension:

$$T_Q = \frac{1}{1-p} \left( \frac{Q}{Q_t} \frac{\partial Q_t}{\partial Q} - 1 \right) \quad (2.14)$$

$$T_h = \frac{1}{1-p} \left( \frac{h}{Q_t} \frac{\partial Q_t}{\partial h} \right) \quad (2.15)$$

Comme le précise De Vriend (1987), [33], dans de nombreuses formules de transport,  $T_Q$  et  $T_h$  sont des paramètres constants ou variant très peu comparés à  $Q_t$ . Par exemple, pour la formule de Engelund-Hansen, ces paramètres sont obtenus facilement:

$$T_Q = \frac{1}{1-p} (b-1) = \frac{4}{1-p}$$

$$T_h = \frac{1}{1-p} (-b) = \frac{-5}{1-p}$$

On suppose que  $T_Q$  et  $T_h$  sont du même ordre de grandeur:

$$o(T_Q) = o(T_h) = 10$$

On introduit  $L^*$  pour caractériser l'échelle de longueur des bancs de sable. Avec cette distance, on peut estimer l'ordre de grandeur de l'opérateur gradient:

$$L^*.o(\vec{\nabla}) = 1$$

De ce fait, on obtient:

$$L^*.o\left(T_Q \frac{\vec{Q}}{Q} \cdot \frac{\vec{\nabla}(Q)}{Q}\right) = L^*.o\left(T_h \frac{\vec{Q}}{Q} \cdot \frac{\vec{\nabla}(h)}{h}\right) = o(T_Q) = o(T_h) = 10$$

On en déduit que l'influence du débit total sur le transport sédimentaire est du même ordre de grandeur que celle de la hauteur d'eau.

Une fois que l'on a développé la loi de conservation du sédiment en fonction des variations hydrodynamiques, on cherche à mettre en évidence le lien qui les unit à l'aide du modèle de courant moyen. Pour cela, on analyse l'équation de l'énergie du modèle hydrodynamique 2DH.

### 2.5.2 Exploitation du modèle de courant : équation de l'énergie

D'abord, on propose quelques simplifications dans l'écriture du modèle de courant moyen. Ensuite on présente l'obtention puis l'analyse de l'équation de l'énergie. L'analyse dimensionnelle de l'équation de l'énergie va permettre d'estimer le poids de chacun des termes de cette relation et d'explicitier la reformulation du bilan sédimentaire (2.13) en fonction des variations de la bathymétrie.

#### Obtention de l'équation de l'énergie

L'équation de conservation de la masse s'écrit sous la forme:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{Q} = 0 \tag{2.16}$$

L'équation de conservation de la quantité de mouvement s'écrit:

$$\vec{\nabla} \cdot \left( \vec{Q} \otimes \frac{\vec{Q}}{h} \right) + gh\vec{\nabla}(h + Z_f) = h\vec{F} - \frac{\vec{\tau}_f}{\rho} \tag{2.17}$$

où le gradient  $\vec{\nabla}$  et la multiplication  $\otimes$  sont définis par :

$$\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{a} \otimes \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{b}^T$$

où  $\vec{a}$  et  $\vec{b}$  sont des vecteurs colonnes et la transposée du vecteur (ou de la matrice) est spécifiée par l'exposant  $T$ .

On a regroupé les forces induites par les tensions de radiation et le terme de diffusion de la quantité de mouvement sous un terme de forçage résultant unique :

$$\bar{h}\vec{F} = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla} \cdot \bar{S} + \vec{\nabla} \cdot \left( K_m h \left( [\vec{\nabla} \otimes \vec{U}] + [\vec{\nabla} \otimes \vec{U}]^T \right) \right)$$

De même, on représente le frottement sur le fond par :

$$\frac{\vec{\tau}_f}{\rho} = C_f \|\vec{U}\| \vec{U}$$

L'équation de l'énergie du modèle de courant est obtenue à partir du produit scalaire de la quantité de mouvement avec son équation de conservation associée :

$$\vec{Q} \cdot \left[ \vec{\nabla} \cdot \left( \vec{Q} \otimes \frac{\vec{Q}}{h} \right) + gh \vec{\nabla} (h + Z_f) \right] = \vec{Q} \cdot \left[ h\vec{F} - \frac{\vec{\tau}_f}{\rho} \right] \quad (2.18)$$

On développe (2.18) en fonction de chaque variable ( $Q, h, Z_f$ ), on divise (2.18) par  $Qgh^2$  et on utilise la conservation de la masse (2.16). On obtient alors une relation entre la variation du débit d'eau, la variation de hauteur d'eau et la variation du fond :

$$\frac{Q^2}{gh^3} \frac{\vec{Q}}{Q} \cdot \frac{\vec{\nabla}(Q)}{Q} + \left( 1 - \frac{Q^2}{gh^3} \right) \frac{\vec{Q}}{Q} \cdot \frac{\vec{\nabla}(h)}{h} + \frac{\vec{Q}}{Q} \cdot \frac{\vec{\nabla}(Z_f)}{h} = \frac{1}{gh^2} \frac{\vec{Q}}{Q} \cdot \left( h\vec{F} - \frac{\vec{\tau}_f}{\rho} \right) \quad (2.19)$$

L'équation de l'énergie permet d'exprimer les variations du débit total et de la hauteur d'eau mises en évidence dans (2.13) en fonction des principaux éléments qui influencent l'écoulement moyen: la forme de la bathymétrie, le forçage induit par les vagues et le frottement sur le fond.

### Analyse dimensionnelle de l'équation de l'énergie

L'analyse dimensionnelle de la relation (2.19) permet de déterminer les équilibres fondamentaux qui existent entre chacun des termes pris en compte par le modèle hydrodynamique.

**a. variation du débit**

Dans la relation (2.19), l'ordre de grandeur de la variation du débit est pondéré par le régime de l'écoulement:

$$L^*.o \left( \frac{Q^2}{gh^3} \frac{\vec{Q}}{Q} \cdot \frac{\vec{\nabla}(Q)}{Q} \right) = F_r^{*2}$$

où on introduit le nombre de Froude:

$$F_r^* = \frac{U^*}{\sqrt{g^*h^*}} = \frac{Q^*}{h^*\sqrt{g^*h^*}}$$

En milieu littoral, le régime d'écoulement est très souvent sous-critique, c'est-à-dire que les effets d'inertie sont prépondérants devant les effets dus à la gravité.

Il faut noter ici que l'ordre de grandeur est estimé pour un écoulement 2DH. Dans une configuration 1DH, la loi de conservation de la masse (2.16) impose au débit de rester constant.

**b. variation de la profondeur**

L'ordre de grandeur de la variation de la hauteur d'eau est influencé par le nombre de Froude:

$$L^*.o \left( \left( 1 - \frac{Q^2}{gh^3} \right) \frac{\vec{Q}}{Q} \cdot \frac{\vec{\nabla}(h)}{h} \right) = 1 - F_r^{*2}$$

**c. variation de la bathymétrie**

L'ordre de grandeur de la variation de la cote du fond ne dépend que du rapport entre la déviation de la surface libre sur la profondeur de l'écoulement:

$$L^*.o \left( \frac{\vec{Q}}{Q} \cdot \frac{\vec{\nabla}(Z_f)}{h} \right) = \frac{Z_f^*}{h^*} = \zeta^* - 1$$

où on définit:

$$\zeta^* = \frac{Z_s^*}{h^*}$$

La présence de vagues sur une bathymétrie variable engendre une déformation de la surface libre moyenne. Celle-ci est enfoncée près de la ligne de déferlement (*set-down*), par contre

elle remonte et dépasse le niveau du plan d'eau au repos à proximité du haut de plage (*set-up*). L'amplitude de ces variations verticales est souvent petite devant la profondeur (nulle en milieu profond), donc l'ordre de grandeur de la variation de la cote du fond est proche de l'unité.

#### d. forçage induit par les vagues

On montre que le terme de forçage est pondéré par le rapport de forme entre la hauteur des vagues et la profondeur du milieu. Comme on l'a précisé dans le chapitre 1, la diffusion latérale de la quantité de mouvement est faible devant les forces motrices induites par les vagues. On considère donc que:

$$o(\bar{h}\vec{F}) = o\left(\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}\cdot\bar{S}\right)$$

Or, on estime que les tensions de radiation sont de l'ordre de l'énergie des vagues:

$$o(\bar{S}) = \frac{1}{8}\rho^*g^*H^{*2} \approx \rho^*g^*H^{*2}\cdot 10^{-1}$$

où  $H^*$  est l'échelle de longueur représentative de la hauteur des vagues. On en déduit que:

$$L^*.o\left(\frac{1}{gh^2}\frac{\vec{Q}}{Q}\cdot h\vec{F}\right) = \gamma^{*2}\cdot 10^{-1}$$

où on introduit le rapport de la hauteur des vagues sur la profondeur d'eau:

$$\gamma^* = \frac{H^*}{h^*}$$

Ce nombre caractérise la croissance des vagues avant le déferlement (*shoaling*) puis leur décroissance dans la zone de déferlement. Il tend vers zéro en milieu profond (au large) et à la ligne d'eau, alors qu'il est maximum ( $\gamma^* \approx 1$ ) à la ligne de déferlement.

#### e. frottement sur le fond

On montre que le terme de frottement est pondéré par le nombre de Froude et un rapport de forme basé sur le produit du coefficient de frottement par la longueur des bancs de sable rapportée à la profondeur du milieu:

$$L^*.o\left(\frac{1}{gh^2}\frac{\vec{Q}}{Q}\cdot\frac{\vec{\tau}_f}{\rho}\right) = \delta^*F_r^{*2}$$

où on définit le rapport de forme de la bathymétrie:

$$\delta^* = \frac{L^* C_f^*}{h^*}$$

On constate que le frottement est le seul processus dont le poids relatif (par rapport aux autres processus cités) est directement influencé par la longueur d'onde des bancs de sable.

### f. compétition entre les termes

A l'aide de l'analyse précédente, on peut réécrire l'équation de l'énergie (2.19) sous la forme:

$$F_r^{*2} \left( \frac{Q'^2}{g'h'^3} \frac{\vec{Q}'}{Q'} \cdot \frac{\vec{\nabla}(Q')}{Q'} \right) + (1 - F_r^{*2}) \left( \left( 1 - \frac{Q'^2}{g'h'^3} \right) \frac{\vec{Q}'}{Q'} \cdot \frac{\vec{\nabla}(h')}{h'} \right) + (\zeta^* - 1) \left( \frac{\vec{Q}'}{Q'} \cdot \frac{\vec{\nabla}(Z_f')}{h'} \right) = \gamma^{*2} \cdot 10^{-1} \left( \frac{1}{g'h'^2} \frac{\vec{Q}'}{Q'} \cdot h' \vec{F}' \right) - \delta^* F_r^{*2} \left( \frac{1}{g'h'^2} \frac{\vec{Q}'}{Q'} \cdot \frac{\vec{\tau}'_f}{\rho'} \right) \quad (2.20)$$

On a mis en évidence quatre nombres adimensionnels pour estimer le poids respectif des cinq termes de l'équation de l'énergie (2.19).

D'abord, le nombre de Froude est impliqué dans l'ordre de grandeur de trois de ces termes. Le terme relatif au débit est le seul pondéré uniquement par le nombre de Froude. Le terme relatif au frottement est pondéré en plus par le rapport de forme de la bathymétrie ( $\delta^*$ ), ainsi dans le cas où  $\delta^* \ll 1$ , le terme relatif au frottement est négligeable devant le terme relatif au débit. Le terme relatif au débit est lui-même négligeable devant le terme relatif à la profondeur si  $F_r^{*2} \ll 0.5$ .

D'autre part, le terme relatif à la bathymétrie n'est influencé que par le nombre caractérisant la déformation relative de la surface libre devant la profondeur de l'écoulement ( $\zeta^*$ ). Enfin, le terme relatif au forçage par les vagues est uniquement pondéré par le rapport de la hauteur des vagues sur la profondeur ( $\gamma^*$ ).

Pour mieux appréhender l'influence de chaque terme dans l'équation de l'énergie, on s'intéresse à un exemple de morphodynamique littoral. On considère les ordres de grandeur

suivants:

$$\begin{aligned}
 U^* &\approx 1 \text{ m.s}^{-1} \quad , \quad g^* \approx 10 \text{ m.s}^{-2} \\
 h^* &\approx 1 \text{ m} \quad , \quad Z_s^* \approx 10^{-1} \text{ m} \\
 L^* &\approx 10^2 \text{ m} \quad , \quad C_f^* \approx 10^{-3} \\
 H^* &\approx 1 \text{ m}
 \end{aligned} \tag{2.21}$$

Dans ce cas, le régime de l'écoulement moyen reste "largement" sous critique. Les différents nombres adimensionnels introduits précédemment ont pour valeur:

$$F_r^{*2} \approx 10^{-1} \quad , \quad \zeta^* \approx 10^{-1} \quad , \quad \gamma^{*2} \approx 1 \quad , \quad \delta^* \approx 10^{-1}$$

Pour cet exemple, on obtient alors:

$$\begin{aligned}
 L^*.o \left( \frac{\vec{Q}}{Q} \cdot \frac{\vec{\nabla}(Z_f)}{h} \right) &\approx 10^0 \\
 L^*.o \left( \left( 1 - \frac{Q^2}{gh^3} \right) \frac{\vec{Q}}{Q} \cdot \frac{\vec{\nabla}(h)}{h} \right) &\approx 10^0 \\
 L^*.o \left( \frac{Q^2}{gh^3} \frac{\vec{Q}}{Q} \cdot \frac{\vec{\nabla}(Q)}{Q} \right) &\approx 10^{-1} \\
 L^*.o \left( \frac{1}{gh^2} \frac{\vec{Q}}{Q} \cdot h\vec{F} \right) &\approx 10^{-1} \\
 L^*.o \left( \frac{1}{gh^2} \frac{\vec{Q}}{Q} \cdot \frac{\vec{\tau}_f}{\rho} \right) &\approx 10^{-2}
 \end{aligned}$$

L'analyse de l'équation de l'énergie (2.19) pour les données (2.21) montre qu'à faible régime d'écoulement ( $F_r^{*2} \ll 1$ ), les termes liés à la variation de bathymétrie et de profondeur sont du même ordre de grandeur ( $10^0$ ). Les termes liés à la variation de débit et au forçage induit par les vagues sont aussi du même ordre de grandeur ( $10^{-1}$ ). Enfin, on constate que le terme lié au frottement n'intervient qu'à l'ordre  $10^{-2}$ , dans ce cas il serait négligeable devant les autres termes.

### 2.5.3 Mécanismes mis en évidence par l'équation des ondes de sables

L'exploitation du modèle de courant a permis d'analyser l'équation de l'énergie et l'exemple précédent illustre clairement qu'à petit nombre de Froude, la variation de profondeur est plus fortement liée à la variation de la bathymétrie que ne l'est la variation de débit. Ainsi à partir de la reformulation du bilan sédimentaire (2.13), ce résultat permet de relier quantitativement le terme relatif à la variation de profondeur  $\left(Q_t T_h \frac{\vec{Q}}{Q} \cdot \frac{\vec{\nabla}(h)}{h}\right)$  en fonction de la variation du fond et de termes d'ordre supérieur:

$$\begin{aligned} Q_t T_h \frac{\vec{Q}}{Q} \cdot \frac{\vec{\nabla}(h)}{h} = & - Q_t T_h \frac{1}{1 - F_r^2} \frac{\vec{Q}}{Q} \cdot \frac{\vec{\nabla}(Z_f)}{h} - Q_t T_h \frac{F_r^2}{1 - F_r^2} \frac{\vec{Q}}{Q} \cdot \frac{\vec{\nabla}(Q)}{Q} \\ & + Q_t T_h \frac{1}{1 - F_r^2} \frac{1}{gh^2} \frac{\vec{Q}}{Q} \cdot h \vec{F} - Q_t T_h \frac{1}{1 - F_r^2} \frac{1}{gh^2} \frac{\vec{Q}}{Q} \cdot \frac{\vec{\tau}_f}{\rho} \end{aligned} \quad (2.22)$$

où l'on a introduit le nombre de Froude local  $F_r^2 = Q^2/gh^3$ .

D'autre part, ce résultat conduit à conserver le terme relatif à la variation de débit  $\left(Q_t T_Q \frac{\vec{Q}}{Q} \cdot \frac{\vec{\nabla}(Q)}{Q}\right)$  dans la relation (2.13). L'influence de la variation de débit sur la morphodynamique sédimentaire est cependant complétée par des termes d'ordre supérieur introduits par la relation précédente (2.22).

Ainsi, à partir des relations (2.13) et (2.22), on obtient une relation baptisée "équation des ondes de sable":

$$\begin{aligned} \frac{\partial Z_f}{\partial t} - \underbrace{Q_t T_h \frac{1}{1 - F_r^2} \frac{\vec{Q}}{Q} \cdot \frac{\vec{\nabla}(Z_f)}{h}}_* = & \underbrace{Q_t \left( T_h \frac{F_r^2}{1 - F_r^2} - T_Q \right) \frac{\vec{Q}}{Q} \cdot \frac{\vec{\nabla}(Q)}{Q}}_* \\ & - \underbrace{Q_t T_h \frac{1}{1 - F_r^2} \frac{1}{gh^2} \frac{\vec{Q}}{Q} \cdot h \vec{F}}_{**} \\ & + \underbrace{Q_t T_h \frac{1}{1 - F_r^2} \frac{1}{gh^2} \frac{\vec{Q}}{Q} \cdot \frac{\vec{\tau}_f}{\rho}}_{***} \end{aligned} \quad (2.23)$$

Jusqu'ici et dans le cadre des hypothèses indiquées précédemment, cette relation donne l'évolution du fond de manière "complète". Elle prend en compte tous les processus initialement modélisés par le couplage hydro-sédimentaire (2.12), (2.16) et (2.17).

Les analyses dimensionnelles précédentes du bilan sédimentaire et de l'équation de l'énergie ont montré que dans l'équation des ondes de sable (2.23) les termes (\*) sont du

même ordre de grandeur et prépondérants devant les autres termes (\*\*\*) et (\*\*). C'est pourquoi, dans la suite on détaille les différents processus intervenant dans la dynamique des corps sableux qui sont mis en relief par l'équation des ondes de sable. Pour cela on s'intéresse à des modèles "incomplets" qui distinguent l'effet respectif des différents termes de l'équation des ondes de sable.

### Effet d'advection non-linéaire induit par la forme de la bathymétrie

Le premier terme de l'équation des ondes de sable (2.23) met en évidence que le mouvement des corps sédimentaires est influencé par un mécanisme lié directement à la forme du fond. Ce mécanisme de dispersion des ondes de sable est mis en évidence par le modèle suivant:

$$\frac{\partial Z_f}{\partial t} - \underbrace{T_h \frac{Q_t}{h} \frac{1}{1 - F_r^2} \frac{\vec{Q}}{Q}}_{\vec{C}_{Z_f}} \cdot \vec{\nabla}(Z_f) = 0 \quad (2.24)$$

où  $\vec{C}_{Z_f}$  est la vitesse caractéristique de l'advection de la quantité  $Z_f$ .

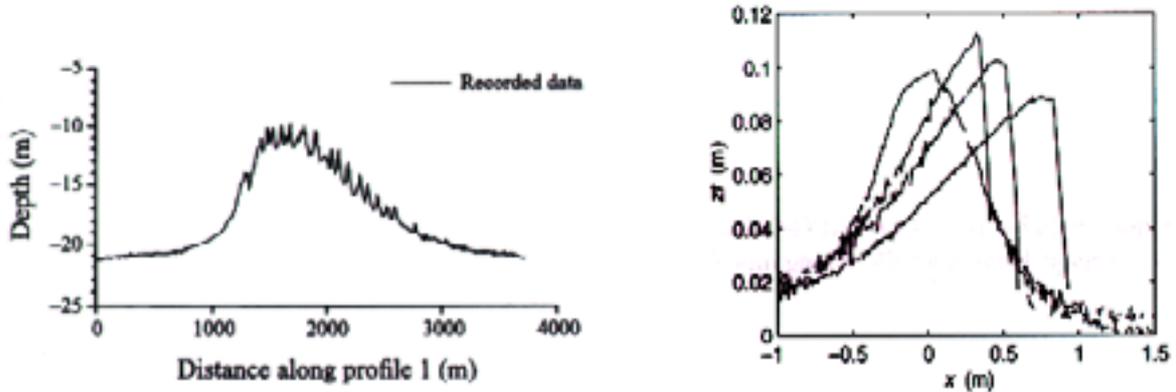
L'équation (2.24) permet de mettre en évidence la nature hyperbolique du comportement des ondes de sable et précise la vitesse caractéristique de l'onde non-linéaire pour des régimes d'écoulement largement sous-critiques.

La célérité des ondes de sable dépend de la vitesse moyenne des sédiments ( $Q_t/h$ ), de la sensibilité du flux de sédiment en fonction à la profondeur (on rappelle que  $T_h < 0$ ) et du régime de l'écoulement. Cette vitesse non uniforme permet de prédire un mouvement horizontal des corps sédimentaires dans le sens de l'écoulement, lorsque le régime d'écoulement est sous-critique ( $F_r < 1$ ).

De plus, comme la vitesse est inversement proportionnelle à la profondeur, la face avant du corps sédimentaire se raidit lors du déplacement, alors que la face arrière tend à s'allonger. Ce comportement est conforme au mouvement des bancs de sable dans un courant uniforme observé dans la nature (figure 2.14a) et reproduit en canal (2.14b).

Cette onde non-linéaire illustrée sur la figure 2.15 se propage et se déforme en conservant sa hauteur jusqu'à former une discontinuité. Au delà du choc, l'énergie de l'onde se dissipe. L'onde continue de progresser avec une face raide (onde de choc) et une face régulière (onde de détente) en perdant de l'amplitude (Lighthill (1978), [78]).

Pour illustrer l'effet précédent, on s'intéresse à un cas proposé par De Vriend (1987), [33], dont on a simulé l'évolution morphodynamique. Il s'agit d'un écoulement uniforme



(a) Section du banc Middelkerke en mer du Nord; selon O'connor et al. (1996), [95]

(b) Profil expérimental d'une dune à  $t = 0, 10, 27, 50 \text{ min}$  pour un courant moyen de  $U = 0.45 \text{ m/s}$  et un diamètre de grain  $d = 0.9 \text{ mm}$ ; d'après Michallet et al., [86]

Figure 2.14 : Observation des ondes de sable dans le milieu naturel et en laboratoire.

dans un canal sur un fond plat perturbé par une dune de sable sous-marine initialement circulaire (figure 2.16a). Ce cas est décrit plus précisément dans le chapitre 3 dans la partie consacrée aux validations du modèle hydrodynamique. Ici, il s'inscrit parfaitement dans les hypothèses de l'équation des ondes de sable car le régime d'écoulement est faible ( $F_r^2 \approx 0.25$ ) et les effets de la houle sont négligeables (pas de vagues). L'évolution morphodynamique de la dune selon le modèle (2.24) est illustrée sur la figure 2.16b. Cette simulation 2D confirme bien le comportement de la dune tel qu'il a été décrit ci-dessus en 1D.

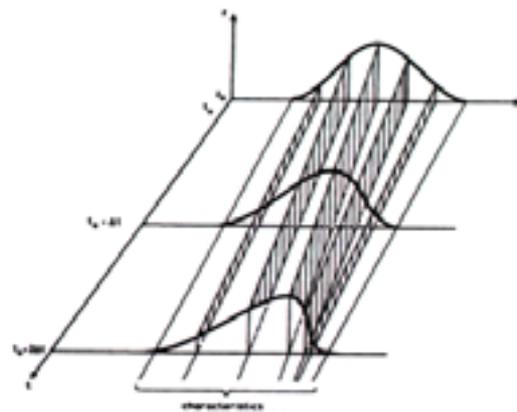
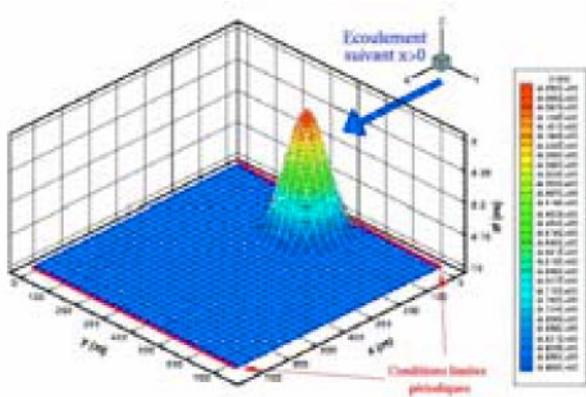
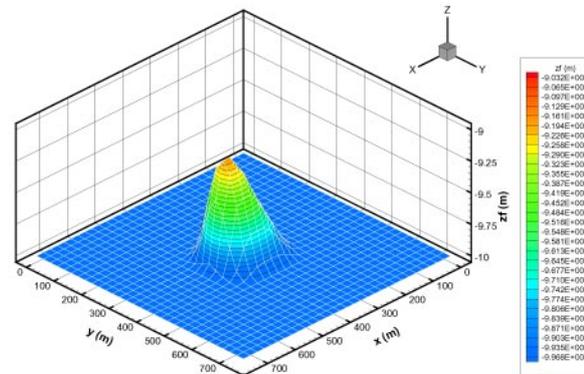


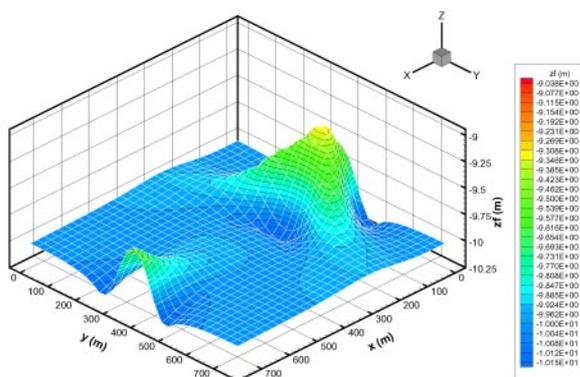
Figure 2.15 : Evolution spatio-temporelle du profil d'une onde non-linéaire; selon De Vriend (1987), [32].



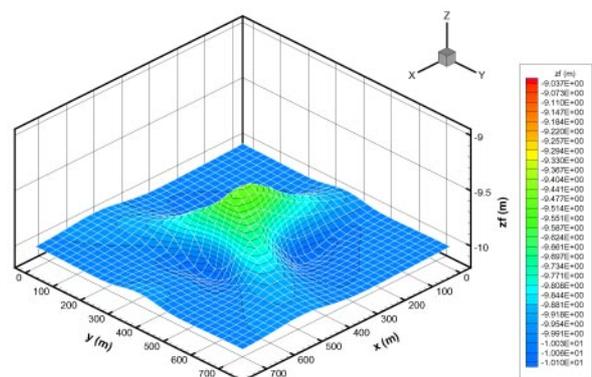
(a) Forme initiale de la dune.



(b) Advection non-linéaire de la dune selon le modèle (2.24).



(c) Déformation en étoile à trois branches de la dune suite aux effets 2D induits par la variation du débit selon le modèle (2.13).



(d) Evolution morphodynamique de la dune après couplage de l'effet d'advection et des effets 2D induits par la variation du débit.

Figure 2.16 : Illustration des effets majeurs mis en évidence par l'équation des ondes de sable sur la morphodynamique d'une dune dans un canal.

### Effet 2D induit par la variation de débit

L'équation des ondes de sable (2.23) met en évidence un deuxième mécanisme morphodynamique du même ordre de grandeur que l'advection mais de nature différente. Ce mécanisme est contrôlé par la redistribution 2D des débits autour d'une forme sédimentaire. Ce mécanisme de diffusion des ondes de sable est modélisé par l'équation:

$$\frac{\partial Z_f}{\partial t} = \underbrace{Q_t \left( T_h \frac{F_r^2}{1 - F_r^2} - T_Q \right)}_{K_Q} \frac{\vec{Q}}{Q} \cdot \frac{\vec{\nabla}(Q)}{Q} \quad (2.25)$$

où  $K_Q < 0$  car le plus souvent on a  $T_h < 0$  et  $T_Q > 0$ .

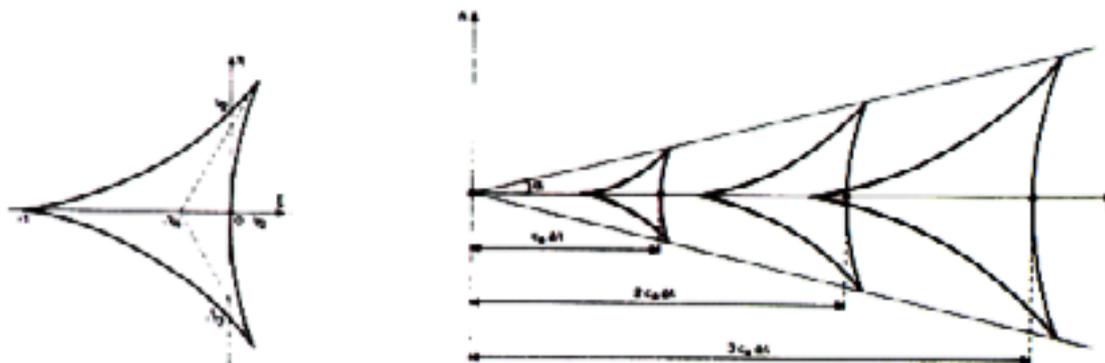
Cet effet dû à la variation du débit dans la direction de l'écoulement introduit essentiellement un transport radial anisotrope centré sur le corps sédimentaire et n'introduit aucun mouvement de translation général. Cet effet est inexistant en 1D car le débit est conservé dans l'écoulement. Par contre en 2D et principalement sur des bathymétries complexes, comme l'écoulement se réorganise autour des obstacles sous-marins, le débit d'eau peut varier le long d'une ligne de courant.

Dans l'exemple du canal introduit précédemment, De Vriend (1987), [33], présente l'effet de transport sédimentaire transversal purement 2D comme issu de la divergence des lignes de courant se produisant autour des corps sédimentaires. Il décrit ainsi la formation d'une étoile à trois branches (figure 2.17a) à partir de la théorie des caractéristiques appliquée au modèle hydro-sédimentaire complet sous l'hypothèse de surface libre rigide (nombre de Froude tend vers zéro).

Ici, on montre que le débit diminue en passant sur l'obstacle puis réaugmente une fois l'obstacle franchi alors que de chaque côté de l'obstacle le débit augmente (figure 2.18). On constate alors que les lignes de courant sont très peu déviées par la présence de la dune, mais que la variation du débit, elle est remarquable. A partir de cette répartition du débit et du modèle (2.25) il est possible de décrire complètement le bilan sédimentaire qui contribue à la déformation de la dune initialement circulaire (figure 2.16c).

Comme l'a montré l'analyse de l'équation de l'énergie, les deux effets distingués précédemment (advection et variation du débit en 2D) sont du même ordre de grandeur. On a montré qu'ils agissent fortement sur l'évolution des corps sédimentaires, d'une part en les déplaçant dans l'écoulement et d'autre part en modifiant sensiblement leur géométrie.

$$\frac{\partial Z_f}{\partial t} - T_h \frac{Q_t}{h} \frac{1}{1 - F_r^2} \frac{\vec{Q}}{Q} \cdot \vec{\nabla}(Z_f) = Q_t \left( T_h \frac{F_r^2}{1 - F_r^2} - T_Q \right) \frac{\vec{Q}}{Q} \cdot \frac{\vec{\nabla}(Q)}{Q} \quad (2.26)$$



(a) Forme de base du front

(b) Expansion et advection de la forme dans le courant.

d'onde.

Figure 2.17 : Evolution d'une perturbation morphodynamique élémentaire selon la théorie des caractéristiques dans le cas où le nombre de Froude tend vers 0; selon De Vriend (1987), [33].

Le couplage de ces deux effets à partir du modèle (2.26) est illustré sur les figures 2.16d et 2.17b.

Même si les autres termes de l'équation des ondes de sable sont quantitativement de moindre importance, il est tout de même indispensable de considérer leur influence sur l'évolution des fonds sableux et principalement sur leur stabilité.

### Compétition entre le forçage induit par les vagues et le frottement

La compétition entre le forçage par les vagues et le frottement sur le fond peut être à la base d'instabilités morphodynamiques. Dans ce cas, on s'intéresse à l'évolution du fond combinée selon le modèle suivant:

$$\frac{\partial Z_f}{\partial t} = -Q_t T_h \frac{1}{1 - F_r^2} \frac{1}{gh^2} \underbrace{\frac{\vec{Q}}{Q} \cdot \left( h\vec{F} - \frac{\vec{\tau}_f}{\rho} \right)}_K \quad (2.27)$$

Dans le modèle de courant 2DH, l'intensité du frottement est intimement liée au forçage, l'évolution du fond est alors contrôlée par le signe du forçage résiduel  $K$ .

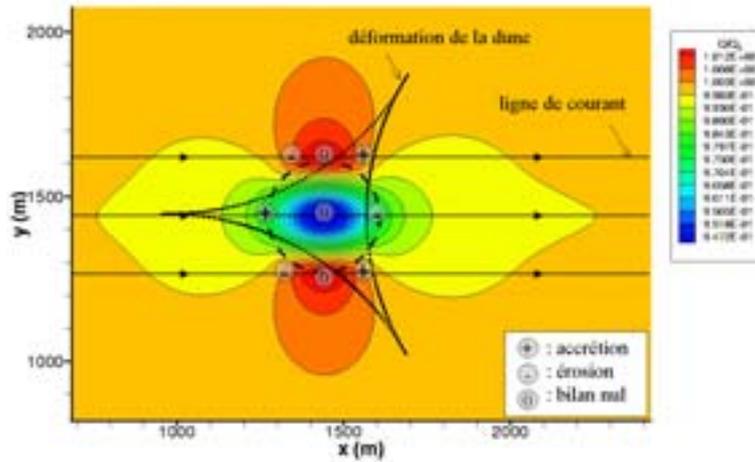


Figure 2.18 : Mise en évidence de la déformation de la dune circulaire à partir des zones d'érosion ( $\frac{\vec{Q}}{Q} \cdot \frac{\vec{\nabla}(Q)}{Q} > 0$ ) et d'accrétion ( $\frac{\vec{Q}}{Q} \cdot \frac{\vec{\nabla}(Q)}{Q} < 0$ ) déduites du champs de débit par le modèle (2.25).

Dans le cas des instabilités de la plage dues au courant longitudinal présentées par Falqués et al. (1996), [48], (§ 2.4.2), l'état de référence hydrodynamique correspond à l'équilibre entre les forces motrices induites par les vagues et les forces résistantes dues au frottement sur le fond:

$$h\vec{F} = \frac{\vec{\tau}_{f0}}{\rho} = \frac{C_f Q_0}{h_0^2} \vec{Q}_0$$

Alors, dans les zones de l'écoulement où le courant est plus rapide que le courant de référence ( $\tau_f > \tau_{f0}$ ), l'érosion du fond est favorisée. Inversement, lorsque le forçage est plus intense que le frottement, le fond est en accrétion. *A priori* ce mécanisme va dans le sens de la stabilité de la plage: une sur-élévation du fond (une dune) engendrerait localement une sur-vitesse, mais comme celle-ci induit une érosion localement plus intense, la plage se trouverait lissée. Néanmoins, les effets induits par le forçage résiduel peuvent être déstabilisants car un déphasage peut apparaître entre la perturbation de l'hydrodynamique et la forme sédimentaire qui lui a donnée naissance.

## 2.5.4 Evolution des bancs de sable dans un courant de dérive longitudinal

Comme on l'a présenté dans le paragraphe 2.4.2, une plage initialement plane et balayée par les vagues est sujette à des instabilités hydro-sédimentaires (Falquès et al. (1996), [49], [48]; Calvete et al. (2001), [20]). Sur la base d'une hydrodynamique simplifiée représentant uniquement le courant de dérive induit par de la houle oblique, on présente la morphodynamique des bancs de sable de faibles amplitudes en suivant le modèle des ondes de sable.

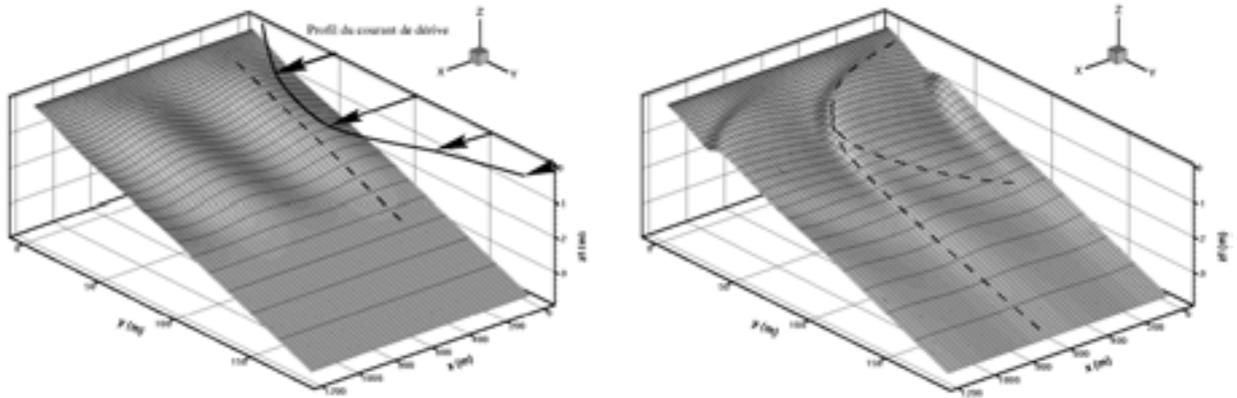
### Courant de dérive forcé par la houle

On considère que la pente de la plage est de 2% et que la hauteur de la houle au large est de 1.5 m. La longueur de la zone de surf est alors voisine de 100 m et on choisit un courant de dérive maximum de l'ordre de 1 m/s. Sur cette plage plane de référence, on suppose que le courant de dérive forcé par une houle oblique régulière est en équilibre avec les forces de frottement qui s'exercent sur le fond (cf. "Courant longitudinal sur une plage plane" au § 3.4.2).

### Evolution morphodynamique de la plage

Une fois la plage plane perturbée par des bancs de sable de faibles amplitudes (figure 2.19a), l'hydrodynamique sur la plage évolue autour de l'état de référence. Ainsi, dans cette configuration, le régime d'écoulement reste assez faible  $F_r^2 = 0.1$ , et cela permet d'exploiter le modèle morphodynamique des ondes de sable dans son domaine de validité (§ 2.5).

Sur la figure 2.19b, on observe que les ondes de sable initiales ont été transportées dans le sens du courant de dérive. Les déformations verticale et horizontale des bancs de sable sont dues essentiellement aux effets de convection non-linéaires. On peut distinguer un fort raidissement de la face avant des ondes de sable dans la zone de surf, tandis que plus au large, des ondes obliques et perpendiculaires à la côte avec des fronts plus doux se développent.



(a) morphologie perturbée et courant de  
référence

(b) évolution de la plage après 50 jours

*Figure 2.19 : Propagation des ondes de sable dans le courant de dérive induit par les vagues.*

### 2.5.5 Limites du modèle des ondes de sable

Le modèle des ondes de sable est développé pour un écoulement forcé par les vagues et dans le cas où le courant est peu influencé par les vagues. L'hypothèse de faible régime d'écoulement (petit nombre de Froude) permet de bien distinguer les effets induits par la variation de hauteur d'eau de ceux induits par la variation du débit; cette hypothèse est d'autant plus valable que l'écoulement est peu perturbé transversalement. Ainsi, on montre que la vitesse d'advection des ondes de sable est faiblement affectée par les effets induits par la variation de débit 2D, le forçage par les vagues et le frottement sur le fond.

## 2.6 Conclusion

L'évolution de la morphologie du fond est obtenue en intégrant l'équation de conservation du sédiment. Même si on ne connaît pas vraiment de loi universelle qui régit le transport sédimentaire dans sa globalité, les flux de sédiment sont estimés localement en fonction des conditions locales de houle et de courant. De ce fait, l'analyse physique des interactions fluide-sédiment est synthétisée dans des paramétrisations du transport sédimentaire à calibrer expérimentalement. L'abondance des modèles et des paramétrisations visant à décrire le transport sédimentaire souligne les difficultés relatives à l'évaluation des flux de sédiment en présence de vagues et de courant moyen à partir des variables hydrodynamiques moyennes.

La morphodynamique sédimentaire en milieu littoral résulte des couplages complexes et des rétroactions qui existent entre le mouvement de l'eau induit par le courant et les vagues, et le mouvement des sédiments. Pour étudier le comportement de la plage à des échelles spatio-temporelles compatibles avec celles de la dynamique des bancs de sable, on restreint la représentation de l'écoulement côtier à un modèle de courant moyen intégré sur la verticale et quasi-stationnaire.

Pour comprendre les mécanismes qui se cachent derrière les couplages hydro-sédimentaires non-linéaires et pour mieux expliquer la morphodynamique sédimentaire, on peut s'appuyer sur l'équation des ondes de sable. Ainsi, en reformulant le modèle morphodynamique dans le cadre des faibles régimes d'écoulement, on obtient un modèle qui permet de mettre en évidence des comportements typiques des corps sédimentaires rencontrés dans la nature. On est capable de remonter aux mécanismes hydrodynamiques qui contrôlent le mouvement de translation (effet de forme) des corps sédimentaires et la redistribution transversale (effet 2D) des sédiments. On met également en évidence les mécanismes hydrodynamiques qui favorisent les instabilités de la plage par compétition entre le forçage induit par les vagues et le frottement sur le fond. Le modèle des ondes de sable met donc en évidence le caractère hyperbolique de la loi de conservation du sédiment et permet d'orienter le choix des méthodes de résolution numérique.



## Chapitre 3

# Modélisation numérique des courants moyens induits par les vagues

### 3.1 Introduction

L'objectif de cette partie est de résoudre numériquement le modèle de courant moyen 2DH à l'échelle de temps sédimentaire défini dans le chapitre 2 par les équations (2.6) et (2.7) :

$$\frac{\partial \bar{Q}_j}{\partial x_j} = 0 \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\bar{Q}_i \bar{Q}_j}{\bar{h}} \right) + g\bar{h} \frac{\partial \bar{Z}_s}{\partial x_i} + C_f \|\vec{U}\| U_i + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{S}_{ij}}{\partial x_j} \\ = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( K_m \bar{h} \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \right) \end{aligned} \quad (3.2)$$

où le courant moyen  $\vec{U}$  est directement lié au débit total  $\vec{\bar{Q}}$ , au débit apporté par les vagues  $\vec{\bar{Q}}$  et à la hauteur d'eau moyenne  $\bar{h}$  par la relation:

$$\vec{\bar{Q}} = \bar{h} \vec{U} + \vec{\bar{Q}} \quad (3.3)$$

En fait, pour faciliter le traitement numérique de ce modèle mathématique, on réintroduit les dérivées temporelles. Cela revient donc à traiter le modèle de courant moyen initial défini par les équations (1.17) et (1.27) du chapitre 1. Ainsi, en adaptant le pas de temps, le modèle numérique permettra de résoudre les écoulements stationnaires et instationnaires.

Pour alléger les notations, on omet la barre sur les variables moyennes. De plus, pour éviter de confondre la notation indicielle utilisée précédemment avec les indices de la discrétisation, on utilise désormais l'écriture symbolique des opérateurs en 2DH. Au final, le modèle hydrodynamique à résoudre se réécrit sous la forme:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{Q} = 0 \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{Q}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \left( \vec{Q} \otimes \frac{\vec{Q}}{h} \right) + gh \vec{\nabla} (h + Z_f) + C_f \|\vec{U}\| \vec{U} + \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} \cdot \vec{S} \\ = \vec{\nabla} \cdot \left( K_m h \left( [\vec{\nabla} \otimes \vec{U}] + [\vec{\nabla} \otimes \vec{U}]^T \right) \right) \end{aligned} \quad (3.5)$$

avec le débit total  $\vec{Q}$  et le débit apporté par les vagues  $\vec{\tilde{Q}}$ :

$$\vec{Q} = \begin{pmatrix} Q_x \\ Q_y \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{\tilde{Q}} = \begin{pmatrix} \tilde{Q}_x \\ \tilde{Q}_y \end{pmatrix}$$

Dans ce chapitre, on présente d'abord la discrétisation numérique des équations du modèle. Les variables recherchées sont  $\vec{Q}(x, y, t)$  et  $h(x, y, t)$ . Dans ce chapitre, on considère que le fond varie beaucoup plus lentement que l'hydrodynamique donc  $Z_f(x, y)$  est pris comme une variable indépendante du temps lors du calcul hydrodynamique, elle serait remise à jour uniquement lors du calcul morphodynamique. De même, on suppose que le champ de vagues n'évolue pas lors du calcul hydrodynamique, ou plus exactement, qu'il est résolu indépendamment des courants moyens. Cela n'écarte pas pour autant une possible rétroaction du courant du courant sur le champ de vagues.

Un couplage numérique original entre l'équation de la loi de conservation de la masse et la loi de conservation de la quantité de mouvement est mis en place pour supprimer la hauteur d'eau des inconnues du problème. L'application du schéma de discrétisation en chaque noeud du domaine de calcul conduit à l'écriture d'un grand système linéaire creux dont la solution fournit les débits. Le couplage numérique permet ensuite de mettre à

jour directement la hauteur d'eau en fonction des débits. Dans la suite, on appelle termes sources, tous les termes qui interviennent uniquement au second membre du système linéaire.

Ensuite, on présente la méthode pour “inverser” la matrice de manière itérative avec un préconditionnement robuste. Les difficultés de préconditionnement du système linéaire conduisent à l'optimisation du pas de temps pour obtenir le plus rapidement possible la solution stationnaire du modèle de courant moyen.

Enfin, on décrit plusieurs cas de validation pour déterminer les performances du modèle numérique. On vérifie que la méthode converge à l'ordre deux sur les solutions stationnaires. Par ailleurs, on note que cette méthode permet d'obtenir des solutions instationnaires de bonne qualité en choisissant un pas de temps compatible avec la condition de Courant-Fiedrichs-Lewy (CFL) du problème physique.

On précise que les courants moyens obtenus en présence de la houle sur des plages complexes sont forcés en fonction du modèle de houle REFDIF (Kirby (1994), [72]; Castelle (2001), [22]). Ce modèle parabolisé permet de s'affranchir de conditions limites complexes et le système tridiagonal formé par la discrétisation en différences finies est très rapide à résoudre.

## 3.2 Discrétisation numérique

La forme des équations de Saint-Venant 2DH se rapproche de très près des équations de Navier-Stokes compressible en 2D. Cela permet de s'appuyer sur les techniques numériques mises au point pour d'autres domaines d'application comme l'aéronautique (Hirsch (1988,1990), [62], [63]; Yee (1987), [151]; Sod (1985), [121]; Leveque (1992), [77]).

Les discussions à propos de l'implémentation des schémas sur des maillages décalés ou colocalisés sont ouvertes. Vreugdenhil (1990), [146], rapporte que l'approximation numérique des solutions d'ondes pour les problèmes hyperboliques assure potentiellement une meilleure précision avec des méthodes colocalisées qu'avec une discrétisation sur maillages décalés car aucune interpolation n'est utilisée pour obtenir la valeur des variables au noeud. D'un autre côté, l'approche non-colocalisée permet d'exprimer les flux de certaines quantités directement sur les interfaces des volumes de contrôle. L'utilisation des maillages décalés prévient également l'apparition d'ondes parasites et renforce ainsi la stabilité des

schémas (Patankar (1980), [101]).

Pour le modèle de courant moyen, il n'existe pas un unique schéma numérique, idéal dans toutes les situations d'écoulements, et indépendant des effets rattachés aux nombres de Froude ou de Reynolds, des effets liés au frottement sur le fond ou à l'importance des tensions de radiations. La méthode numérique doit principalement respecter la nature des équations différentielles qu'elle veut résoudre et tenir compte de conditions limites cohérentes. La plupart des schémas numériques sont écrits pour la version linéarisée des équations des milieux peu profonds, car les termes non-linéaires peuvent être traités de manière découplée des autres et résolus par des techniques appropriées (Agoshkov et al. (1993), [1]).

En premier lieu, la discrétisation temporelle fait l'objet de plusieurs approches telles que la discrétisation explicite, (Peraire et al. (1986), [102], Vreugdenhil (1990), [146]), semi-implicite, (Casulli (1990), [23]), et entièrement implicite (Stelling (1984), [126]). Sur les maillages structurés, les techniques de décomposition par direction (*Alternate Direction Implicit*: ADI) sont souvent employées pour faciliter la résolution des méthodes implicites. Elles permettent de réduire le problème à la résolution d'un système tridiagonal, mais elles sont difficiles à optimiser pour des configurations générales (Mitchell et Griffiths (1980), [88]).

En ce qui concerne la discrétisation des dérivées spatiales, la principale caractéristique des méthodes spectrales est que les solutions discrètes sont cherchées dans des espaces de polynômes de haut degré. En ce sens, la précision de ces méthodes n'est limitée que par la régularité de la fonction à approcher. De même, la méthode des éléments finis, initialement développée pour l'analyse des structures mécaniques, s'appuie sur des bases mathématiques rigoureuses avec des conditions précises pour l'existence de la solution, sa convergence et l'encadrement de l'erreur commise. Les schémas aux différences finies en sont une famille des plus populaires car ils exploitent simplement des développements limités à un certain ordre. Ainsi, la méthode des volumes finis, par une discrétisation directe de la forme intégrale des lois de conservation inhérente à la mécanique des fluides, est un bon compromis entre les deux précédentes.

Enfin, le traitement des conditions limites est particulièrement important pour résoudre le modèle discret. En dehors des conditions limites caractérisant plus spécialement les obstacles comme les conditions de glissement ou d'adhérence, les conditions limites libres pour les problèmes d'ondes sont au coeur de nombreux travaux de recherche (Orlanski (1976), [98]; Thompson (1987), [135]; Guo et al. (1995), [60]; Tang et al. (1996),

[132]). Cependant, le traitement de cette condition ouverte pour les problèmes stationnaires en implicite est moins abordé (Giles (1990), [57]; Agoshkov (1993), [1]). La théorie des caractéristiques est à la base de la plupart des formulations des conditions limites ouvertes mais elle n'est pas toujours applicable facilement. Pour réduire l'influence des limites sur le phénomène que l'on analyse, on augmente la taille du domaine de calcul, ou bien on utilise des conditions limites périodiques.

Pour déterminer la solution stationnaire du modèle de courant (3.1) et (3.2), on a choisi une résolution par volumes finis entièrement implicite sur un maillage à grilles décalées (vecteurs, scalaires).

### 3.2.1 Discrétisation temporelle implicite

La méthode implicite consiste à résoudre chaque terme des équations du modèle au même instant. L'avantage des méthodes implicites réside dans la souplesse d'utilisation puisque ces méthodes ne sont pas soumises au critère CFL selon lequel la progression des ondes est limitée à moins d'une maille par pas de temps. On est donc en mesure de "filtrer" les phénomènes physiques contenus dans les équations par le choix du pas de temps dans la discrétisation temporelle. En utilisant des grands pas de temps, l'opérateur  $\frac{\partial}{\partial t}$  perd de l'importance dans les équations et on tend rapidement vers une solution de moins en moins dépendante du temps. Par contre, si on souhaite décrire un régime transitoire, il faut respecter la CFL du problème.

Dans la suite, on présente deux discrétisations temporelles, à l'ordre 1 et 2, pour insister sur son impact au niveau de la discrétisation des termes non-linéaires et du couplage numérique entre l'équation de conservation de la masse et l'équation de conservation de la quantité de mouvement. Au final, la méthode à l'ordre 2 est retenue pour obtenir la solution stationnaire des courants moyens.

#### Conservation de la masse

On choisit de discrétiser tous les termes de l'équation de conservation de la masse (3.1) à l'instant  $t^{n+1}$ , où la variable de temps  $t$  est discrétisée avec un pas de temps  $dt$  constant, et le  $n^{ime}$  pas de temps est défini par  $t^n = ndt$ .

**a. terme inertiel**

On définit la méthode (H:1) par la discrétisation décentrée à l'ordre 1 en temps du terme inertiel:

$$\left[ \frac{\partial h}{\partial t} \right]^{n+1} = \frac{h^{n+1} - h^n}{dt} + o(dt) \quad (3.6)$$

où  $o(dt)$  signifie que les termes tronqués sont au moins proportionnels à  $dt$ .

La méthode (H:2) est quant à elle définie par la discrétisation décentrée à l'ordre 2 en temps du schéma Gear:

$$\left[ \frac{\partial h}{\partial t} \right]^{n+1} = \frac{1.5h^{n+1} - 2h^n - 0.5h^{n-1}}{dt} + o(dt^2) \quad (3.7)$$

**b. bilan de flux**

Le bilan spatial des débits liquides à l'instant  $t^{n+1}$  est donné par:

$$\left[ \vec{\nabla} \cdot \vec{Q} \right]^{n+1} = \vec{\nabla} \cdot \vec{Q}^{n+1} \quad (3.8)$$

**Conservation de la quantité de mouvement**

Comme pour la conservation de la masse, on choisit de discrétiser tous les termes de l'équation de conservation de la quantité de mouvement (3.2) à l'instant  $t^{n+1}$ .

**a. inertie**

Comme précédemment, on peut définir une méthode à l'ordre 1 (Q:1) et une méthode à l'ordre 2 (Q:2) basée sur la discrétisation décalée du terme inertielle. Dans la méthode (Q:1) donne:

$$\left[ \frac{\partial \vec{Q}}{\partial t} \right]^{n+1} = \frac{\vec{Q}^{n+1} - \vec{Q}^n}{dt} + o(dt) \quad (3.9)$$

Avec la méthode (Q:2), on obtient:

$$\left[ \frac{\partial \vec{Q}}{\partial t} \right]^{n+1} = \frac{1.5\vec{Q}^{n+1} - 2\vec{Q}^n - 0.5\vec{Q}^{n-1}}{dt} + o(dt^2) \quad (3.10)$$

### b. convection

Le terme convectif est non-linéaire par rapport à  $\vec{Q}$ . Pour le résoudre implicitement, on doit l'exprimer par une relation linéaire de l'inconnue  $\vec{Q}^{n+1}$ :

$$\left[ \vec{\nabla} \cdot \left( \vec{Q} \otimes \frac{\vec{Q}}{h} \right) \right]^{n+1} \approx \vec{\nabla} \cdot \left( \vec{Q}^{n+1} \otimes \left[ \frac{\vec{Q}}{h} \right]^* \right) \quad (3.11)$$

Pour exprimer la vitesse  $\left[ \frac{\vec{Q}}{h} \right]^*$  de façon indépendante de  $\vec{Q}^{n+1}$ , on définit la méthode (NL:1) par l'approximation de cette vitesse à l'ordre 1:

$$\left[ \frac{\vec{Q}}{h} \right]^* = \frac{\vec{Q}^n}{h^n} = \left[ \frac{\vec{Q}}{h} \right]^{n+1} + o(dt) \quad (3.12)$$

L'approximation de cette vitesse à l'ordre 2 définit la méthode (NL:2) et permet d'obtenir:

$$\left[ \frac{\vec{Q}}{h} \right]^* = 2 \frac{\vec{Q}^n}{h^n} - \frac{\vec{Q}^{n-1}}{h^{n-1}} = \left[ \frac{\vec{Q}}{h} \right]^{n+1} + o(dt^2) \quad (3.13)$$

Remarque: de part la non-linéarité du tenseur  $\vec{Q} \otimes \frac{\vec{Q}}{h}$  avec les variables de résolution, ce tenseur symétrique par définition n'est pas discrétisé de manière strictement symétrique. Les termes croisés sont donnés par :

$$Q_y^{n+1} \left[ \frac{Q_x}{h} \right]^* \neq Q_x^{n+1} \left[ \frac{Q_y}{h} \right]^* \quad (3.14)$$

Seule la solution stationnaire du problème fait apparaître l'égalité de ces termes.

### c. pression hydrostatique

Le terme lié à la force de pression hydrostatique est non linéaire par rapport à  $h$ . Pour résoudre le terme de pression hydrostatique implicitement, on doit l'exprimer par une relation linéaire de l'inconnue  $h^{n+1}$ :

$$\left[ gh \vec{\nabla} (h + Z_f) \right]^{n+1} \approx gh^* \vec{\nabla} (h^{n+1} + Z_f) \quad (3.15)$$

De ce fait, la hauteur  $h^*$  doit s'exprimer de façon indépendante de  $h^{n+1}$ . L'approximation de  $h^*$  à l'ordre 1 (méthode NL:1) permet d'obtenir:

$$h^* = h^n = h^{n+1} + o(dt) \quad (3.16)$$

L'approximation de  $h^*$  à l'ordre 2 (méthode NL:2) permet d'obtenir:

$$h^* = 2h^n - h^{n-1} = h^{n+1} + o(dt^2) \quad (3.17)$$

Le terme  $gh^*\vec{\nabla}h^{n+1}$  est résolu implicitement en fonction de la hauteur d'eau, alors que le terme  $gh^*\vec{\nabla}Z_f$  intervient dans le terme source lors de la résolution.

#### d. frottement sur le fond

L'expression retenue (§1.3.1) pour modéliser la force de friction sur le fond est non linéaire par rapport à la vitesse du courant moyen  $\vec{U}$ . Pour résoudre le terme de frottement sur le fond implicitement, on doit l'exprimer par une relation linéaire de l'inconnue principale  $\vec{Q}^{n+1}$ :

$$\left[ C_f \|\vec{U}\| \vec{U} \right]^{n+1} \approx K_f^* (\vec{Q}^{n+1} - \vec{Q}) \quad \text{avec} \quad K_f^* = \left[ C_f \frac{\|\vec{U}\|}{h} \right]^* \quad (3.18)$$

On exprime le rapport  $[K_f]^*$  de façon indépendante des variables  $\vec{Q}^{n+1}$  et  $h^{n+1}$ . L'approximation de  $[K_f]^*$  à l'ordre 1 (méthode NL:1) permet d'obtenir:

$$K_f^* = K_f^n = K_f^{n+1} + o(dt) \quad (3.19)$$

L'approximation de  $K_f^*$  à l'ordre 2 (méthode NL:2) permet d'obtenir:

$$K_f^* = 2K_f^n - K_f^{n-1} = K_f^{n+1} + o(dt^2) \quad (3.20)$$

Le terme de frottement est résolu implicitement en fonction du débit liquide total tandis que le terme de frottement lié à la houle intervient dans le terme source du modèle.

#### e. diffusion latérale turbulente

Le modèle de diffusion latérale turbulente présenté précédemment (§1.3.3) est non linéaire. Il dépend à la fois du courant moyen  $\vec{U}$  et de la hauteur d'eau  $h$ . Pour le résoudre implicitement, on doit l'exprimer par une relation linéaire de l'inconnue principale  $\vec{Q}^{n+1}$ :

$$\begin{aligned} & \left[ \vec{\nabla} \cdot \left( K_m h \left( [\vec{\nabla} \otimes \vec{U}] + [\vec{\nabla} \otimes \vec{U}]^T \right) \right) \right]^{n+1} \\ & \approx \vec{\nabla} \cdot \left( [K_m h]^* \left( [\vec{\nabla} \otimes \vec{U}^*] + [\vec{\nabla} \otimes \vec{U}^*]^T \right) \right) \end{aligned} \quad (3.21)$$

avec le coefficient de mélange  $[K_m h]^* \approx [K_m h]^{n+1}$  et le courant moyen:

$$\vec{U}^* = \frac{\vec{Q}^{n+1} - \vec{Q}}{h^*} \approx \vec{U}^{n+1} \quad (3.22)$$

On doit exprimer  $[K_m h]^*$  et  $\frac{1}{h^*}$  de façon indépendante des variables  $\vec{Q}^{n+1}$  et  $h^{n+1}$ . L'approximation à l'ordre 1 (méthode NL:1) permet d'obtenir:

$$[K_m h]^* = [K_m h]^n = [K_m h]^{n+1} + o(dt) \quad (3.23)$$

$$\frac{1}{h^*} = \frac{1}{h^n} = \frac{1}{h^{n+1}} + o(dt) \quad (3.24)$$

L'approximation à l'ordre 2 (méthode NL:2) permet d'obtenir:

$$[K_m h]^* = 2[K_m h]^n - [K_m h]^{n-1} = [K_m h]^{n+1} + o(dt^2) \quad (3.25)$$

$$\frac{1}{h^*} = 2\frac{1}{h^n} - \frac{1}{h^{n-1}} = \frac{1}{h^{n+1}} + o(dt^2) \quad (3.26)$$

Le terme de diffusion turbulente est résolu implicitement en fonction du débit total tandis que le terme lié à la houle intervient dans le terme source du modèle.

## f. tensions de radiation

Le terme de tensions de radiation dépend du champ de vagues calculé par REFDIF. Comme il ne s'exprime pas directement en fonction de la variable de résolution, il intervient uniquement dans le terme source du modèle.

### 3.2.2 Couplage débit total - hauteur d'eau

La discrétisation implicite du modèle de courant (3.4) et (3.5) revient à résoudre les inconnues  $(Q_x^{n+1}, Q_y^{n+1}, h^{n+1})$  en fonction de la solution aux instants précédents. Pour simplifier la présentation du modèle, on se limite aux méthodes (H:1,Q:1) pour les termes

inertiels. Le système à résoudre est alors basé sur les équations suivantes:

$$\frac{h^{n+1} - h^n}{dt} + \vec{\nabla} \cdot \vec{Q}^{n+1} = 0 \quad (3.27)$$

$$\begin{aligned} \frac{\vec{Q}^{n+1} - \vec{Q}^n}{dt} + \vec{\nabla} \cdot \left( \vec{Q}^{n+1} \otimes \left[ \frac{\vec{Q}}{h} \right]^* \right) + \boxed{gh^* \vec{\nabla}(h^{n+1})} + K_f^* \vec{Q}^{n+1} \\ - \vec{\nabla} \cdot \left( [K_m h]^* \left( \left[ \vec{\nabla} \otimes \frac{\vec{Q}^{n+1}}{h^*} \right] + \left[ \vec{\nabla} \otimes \frac{\vec{Q}^{n+1}}{h^*} \right]^T \right) \right) \\ = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} \cdot \vec{S} - gh^* \vec{\nabla}(Z_f) + K_f^* \vec{Q} - \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} \cdot \vec{T} \end{aligned} \quad (3.28)$$

avec

$$\vec{T} = \rho [K_m h]^* \left( \left[ \vec{\nabla} \otimes \frac{\vec{Q}}{h^*} \right] + \left[ \vec{\nabla} \otimes \frac{\vec{Q}}{h^*} \right]^T \right)$$

Pour optimiser la résolution numérique, au lieu de résoudre le système de 3 équations sur les 3 inconnues  $(Q_x, Q_y, h)^{n+1}$  d'un seul bloc, on résoud le système à 2 inconnues  $(Q_x, Q_y)^{n+1}$  formé par les 2 équations de la quantité de mouvement horizontale (figure 3.1).

Le couplage entre le débit et la hauteur d'eau est défini de manière linéaire à travers l'équation de continuité discrète (3.27). On substitue  $h^{n+1}$  dans (3.28) par une relation uniquement dépendante de la variable de résolution  $\vec{Q}^{n+1}$ . Concrètement, on reformule le gradient de la surface libre en fonction du bilan des débits:

$$\boxed{gh^* \vec{\nabla}(h^{n+1})} = gh^* \vec{\nabla}(h^n) - dt gh^* \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{Q}^{n+1}) \quad (3.29)$$

Dans ce cas, la hauteur d'eau  $h^{n+1}$  est remise à jour après chaque itération en fonction de la solution  $(Q_x, Q_y)^{n+1}$  calculée précédemment:

$$h^{n+1} = h^n - dt \vec{\nabla} \cdot \vec{Q}^{n+1} \quad (3.30)$$

Remarque: cette méthode de renforcement des couplages internes ressemble à la méthode du Lagrangien Augmenté (L.A.). Fortin (1982), [50], précise que l'algorithme L.A. a été élaboré dans un premier temps pour résoudre le couplage vitesse/pression induit par les équations de Navier-Stokes pour un écoulement incompressible. La distinction entre la méthode L.A. et la méthode utilisée ici est forte puisqu'on ne cherche pas à imposer la contrainte  $\vec{\nabla} \cdot \vec{Q} = 0$  à chaque pas de temps. Cependant, lorsqu'on recherche la solution stationnaire du modèle hydrodynamique, on peut introduire la notion de résolution sous contrainte puisque l'équation de continuité stationnaire doit vérifier  $\vec{\nabla} \cdot \vec{Q} = 0$ .

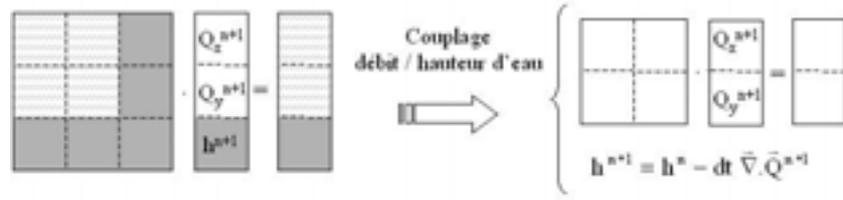


Figure 3.1 : Illustration de la réduction du système à résoudre dû au couplage numérique entre le débit et la hauteur d'eau.

### 3.2.3 Discrétisation spatiale

#### Volumes finis

Sous certains aspects, la méthode des volumes finis peut être considérée comme la méthode des différences finies appliquée à la forme conservative des lois de conservation différentielles écrites dans un système de coordonnées arbitraire; c'est aussi une variante de la formulation faible par éléments finis.

La méthode des volumes finis est la technique par laquelle la formulation intégrale des lois de conservation est discrétisée directement dans l'espace physique. Les lois de conservation intégrales définies par:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \Phi d\Omega + \oint_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{\Gamma} = \int_{\Omega} R d\Omega \quad (3.31)$$

sont écrites directement pour un élément de volume discret  $\Omega = \Omega_{i,j}$  appelé volume de contrôle. Après division par  $\Omega_{i,j}$ , la discrétisation de (3.31) est donnée par:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\Phi_{i,j}) + \frac{1}{\Omega_{i,j}} \sum_{\text{interfaces}} (\vec{F} \cdot \vec{\Gamma})_{i,j} = R_{i,j} \quad (3.32)$$

où  $\Phi_{i,j}$  (resp.  $R_{i,j}$ ) est la moyenne de  $\Phi$  (resp.  $R$ ) sur  $\Omega$ . Pour un volume de contrôle cartésien  $\Omega_{i,j} = dx_{i,j} dy_{i,j}$ , la discrétisation (3.32) devient:

$$\frac{\partial \Phi_{i,j}}{\partial t} + \frac{F_{x\ i+\frac{1}{2},j} - F_{x\ i-\frac{1}{2},j}}{dx_{i,j}} + \frac{F_{y\ i,j+\frac{1}{2}} - F_{y\ i,j-\frac{1}{2}}}{dy_{i,j}} = R_{i,j} \quad (3.33)$$

La méthode des volumes finis est particulièrement souple d'utilisation car elle permet de contrôler les règles et la précision pour l'évaluation des flux au travers des surfaces de contrôle. Le flux numérique  $\vec{F} = (F_x, F_y)$  est évalué aux interfaces des volumes de contrôle  $(i \pm \frac{1}{2}, j \pm \frac{1}{2})$  en fonction des valeurs voisines de  $\Phi$  ou directement par un interpolation

des valeurs voisines du flux. De plus, la consistance de l'équation (3.33) impose que le flux numérique évalué en fonction d'une seule valeur de  $\Phi$  (ou du flux) soit égal à la valeur du flux exact en ce point.

La propriété fondamentale de cette méthode numérique est donc de conserver à chaque instant les quantités de base (masse et quantité de mouvement). Le flux est associé à chaque interface des volumes de contrôle tandis que sa direction est imposée par la normale au volume de contrôle concerné. Ainsi, lorsque le domaine de calcul est entièrement découpé en volumes de contrôle dont les interfaces sont communes, le schéma numérique écrit sous la forme (3.32) ou (3.33) est conservatif. En effet, si on considère la réunion de plusieurs volumes de contrôle, la contribution des flux s'annule sur les interfaces internes (figure 3.2).

Le théorème de Lax et Wendroff (1960) garantit que lorsque la solution  $\Phi_{i,j}$  de (3.33) converge presque partout vers une fonction  $\Phi$  pour des pas de temps et d'espace tendant vers zéro, alors  $\Phi$  est une solution faible de la loi de conservation locale:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{F} = R$$

et vérifie la condition de Rankine-Hugoniot en présence de discontinuités (annexe C).

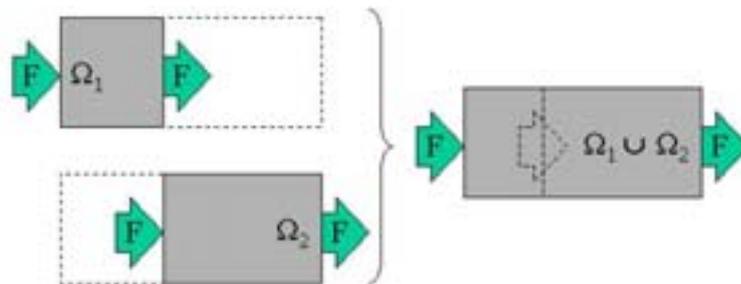


Figure 3.2 : Illustration de la conservation des flux par la méthode des volumes finis.

### Maillage décalé

La résolution implicite sur un maillage colocatif peut entraîner des oscillations de la solution. En fonction de la discrétisation employée, Patankar (1980), [101], montre sur le cas de l'équation de continuité qu'on peut obtenir une solution totalement erronée. Le maillage décalé permet alors d'améliorer la stabilité du schéma numérique.

Les variables sont donc repérées sur des grilles différentes en fonction de leur nature (scalaire, vecteur). Par exemple, les variables  $h_{i,j}$ ,  $Q_{x_{i,j}}$  et  $Q_{y_{i,j}}$  sont repérées par les mêmes indices mais leur localisation géométrique est différente (figures 3.3 et 3.4).

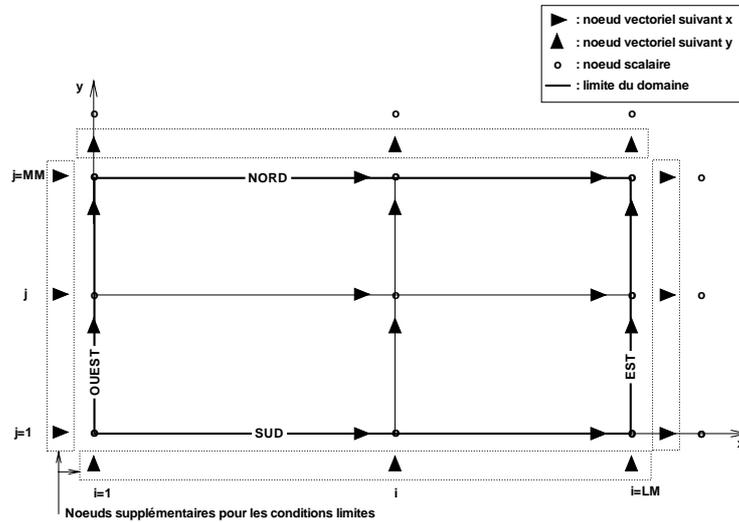


Figure 3.3 : Schéma de définition du domaine de calcul.

On détermine les variables scalaires (hauteur d'eau, viscosité, etc.) sur la grille de référence. La grille scalaire est définie par un maillage cartésien non-uniforme dont les coordonnées d'un nœud sont définies par  $(xg_i, yg_j)$  pour  $i = \{1, \dots, LM\}$  et  $j = \{1, \dots, MM\}$ , où  $LM$  et  $MM$  sont les indices des nœuds extrêmes. Les interfaces du volume de contrôle scalaire sont placées à la demi-maille, entre deux nœuds scalaires. Les interfaces sont alors positionnées en abscisses et en ordonnées par:

$$xc_i = \frac{xg_{i-1} + xg_i}{2}$$

$$yc_i = \frac{yg_{j-1} + yg_j}{2}$$

Le volume de contrôle scalaire est donné par  $\Omega_{i,j} = dxc_{i,j} dyc_{i,j}$  avec:

$$dxc_i = xc_{i+1} - xc_i$$

$$dyc_i = yc_{j+1} - yc_j$$

L'ensemble des interfaces des volumes de contrôle scalaires forme alors un maillage cartésien décalé sur lequel on place les inconnues vectorielles  $\vec{\Phi}$  (débits, vitesses, etc.). Plus précisément, on place les composantes longitudinales  $\vec{\Phi}_{i,j} \cdot \vec{x} = \Phi_{x_{i,j}}$  en  $(xc_i, yg_j)$ , sur l'interface de normale  $\vec{x}$  et alignées avec les nœuds scalaires pour  $i = \{1, \dots, LM, LM + 1\}$

et  $j = \{1, \dots, MM\}$ . Les composantes transversales  $\vec{\Phi}_{i,j} \cdot \vec{y} = \Phi_{y i,j}$  sont positionnées en  $(xg_i, yg_j)$ , sur l'interface de normale  $\vec{y}$  et alignées avec les noeuds scalaires  $i = \{1, \dots, LM\}$  et  $j = \{1, \dots, MM, MM + 1\}$ .

Les volumes de contrôle des composantes longitudinales et transversales sont définis respectivement par  $\Omega_{x i,j} = dx c_{i,j} dy g_{i,j}$  et  $\Omega_{y i,j} = dx g_{i,j} dy c_{i,j}$  avec:

$$dx g_i = xg_{i+1} - xg_i$$

$$dy g_j = yg_{j+1} - yg_j$$

Les noeuds vectoriels qui se trouvent à l'extérieur du maillage scalaire servent à prendre en compte les conditions limites du modèle (figures 3.3).

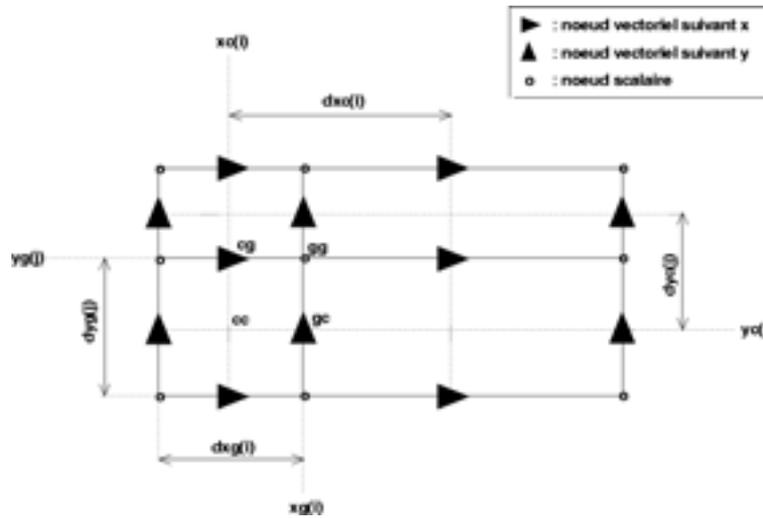


Figure 3.4 : Schéma de définition du maillage décalé.

## Interpolations

On considère que la solution est uniforme à l'intérieur d'un volume de contrôle. Il est donc nécessaire d'utiliser des interpolations pour évaluer certaines quantités sur les interfaces des volumes de contrôle. On utilise des interpolations linéaires entre les noeuds de référence des volumes de contrôle pour une évaluation d'ordre 2 en espace à l'interface

Sur la figure 3.4, on distingue quatre positions types sur le maillage:

$$\begin{aligned} gg_{i,j} &: (xg_i, yg_j) \\ cg_{i,j} &: (xc_i, yg_j) \\ gc_{i,j} &: (xg_i, yc_j) \\ cc_{i,j} &: (xc_i, yc_j) \end{aligned}$$

Les interpolations du scalaire  $\Phi$  sur quatre positions types sont définies par:

$$\begin{aligned} \Phi|_{gg_{i,j}} &= \Phi_{i,j} \\ \Phi|_{cg_{i,j}} &= \frac{\Phi_{i-1,j} + \Phi_{i,j}}{2} \\ \Phi|_{gc_{i,j}} &= \frac{\Phi_{i,j-1} + \Phi_{i,j}}{2} \\ \Phi|_{cc_{i,j}} &= \frac{\Phi_{i-1,j-1} + \Phi_{i,j-1} + \Phi_{i-1,j} + \Phi_{i,j}}{4} \end{aligned}$$

Pour le vecteur  $\vec{\Phi}$ , les interpolations de la composante vectorielle longitudinale  $\Phi_x$  sur trois positions types sont définies par:

$$\begin{aligned} \Phi_x|_{gg_{i,j}} &= \frac{\Phi_{x i,j} \cdot dxg_{i+1} + \Phi_{x i+1,j} \cdot dxg_i}{2 \cdot dxc_i} \\ \Phi_x|_{cg_{i,j}} &= \Phi_{x i,j} \\ \Phi_x|_{cc_{i,j}} &= \frac{\Phi_{x i,j-1} + \Phi_{x i,j}}{2} \end{aligned}$$

et les interpolations de la composante vectorielle transversale  $\Phi_y$  sur trois positions type sont définies par:

$$\begin{aligned} \Phi_y|_{gg_{i,j}} &= \frac{\Phi_{y i,j} \cdot dyg_{j+1} + \Phi_{y i,j+1} \cdot dyg_j}{2 \cdot dyc_j} \\ \Phi_y|_{gc_{i,j}} &= \Phi_{y i,j} \\ \Phi_y|_{cc_{i,j}} &= \frac{\Phi_{y i-1,j} + \Phi_{y i,j}}{2} \end{aligned}$$

Remarque: les interpolations décrites ci-dessus sont d'ordre deux sur un maillage uniforme, et selon Hirsch (1988), [62], cet ordre peut être conservé pour un maillage non-uniforme qui reste suffisamment régulier. Cependant, une meilleure définition des interpolations peut être faite en se basant sur une interpolation bilinéaire de la solution à l'intérieur du volume de contrôle. Dans ce cas on utilise des fonctions d'interpolation typiques des éléments finis.

92 Conservation de la masse

L'équation de conservation de la masse (3.27) est discrétisée sur le volume de contrôle scalaire  $\Omega_{i,j}$ .

a. inertie

Pour le schéma temporel (H:1), le terme inertiel est déterminé par:

$$\frac{1}{\Omega_{i,j}} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega_{i,j}} h d\Omega = \frac{h_{i,j}^{n+1} - h_{i,j}^n}{dt}$$

b. bilan de flux

Le bilan de flux est donné par:

$$\frac{1}{\Omega_{i,j}} \oint_{\Gamma_{i,j}} \vec{Q}^{n+1} \cdot d\vec{\Gamma} = \frac{Q_{x\ i+1,j}^{n+1} - Q_{x\ i-1,j}^{n+1}}{dxc_{i,j}} + \frac{Q_{y\ i,j+1}^{n+1} - Q_{y\ i,j}^{n+1}}{dyc_{i,j}}$$

Le couplage débit-hauteur d'eau est réalisé numériquement par la relation suivante:

$$h_{i,j}^{n+1} = h_{i,j}^n - dt \left( \frac{Q_{x\ i+1,j}^{n+1} - Q_{x\ i-1,j}^{n+1}}{dxc_{i,j}} + \frac{Q_{y\ i,j+1}^{n+1} - Q_{y\ i,j}^{n+1}}{dyc_{i,j}} \right) \tag{3.34}$$

Conservation de la quantité de mouvement suivant  $\vec{x}$

L'équation de conservation de la quantité de mouvement (3.28) est projetée sur la direction  $\vec{x}$  et discrétisée sur le volume de contrôle vectoriel des composantes longitudinales  $\Omega_{x\ i,j}$ . Pour cette discrétisation, le schéma centré fait intervenir localement 9 inconnues. L'ensemble  $\mathcal{N}_{x\ b}$  de ces 9 noeuds de base est illustré sur la figure 3.5.



Figure 3.5 : Schéma de définition du schéma suivant  $x$ .

5 noeuds principaux concernent directement les inconnues  $Q_x^{n+1}$  tandis que 4 noeuds supplémentaires permettent de rendre de compte des couplages transversaux avec les inconnues  $Q_y^{n+1}$ :

$$\begin{aligned}
Q_1 &= Q_{x i,j}^{n+1} & Q_6 &= Q_{y i,j}^{n+1} \\
Q_2 &= Q_{x i+1,j}^{n+1} & Q_7 &= Q_{y i-1,j}^{n+1} \\
Q_3 &= Q_{x i-1,j}^{n+1} & Q_8 &= Q_{y i,j+1}^{n+1} \\
Q_4 &= Q_{x i,j+1}^{n+1} & Q_9 &= Q_{y i-1,j+1}^{n+1} \\
Q_5 &= Q_{x i,j-1}^{n+1}
\end{aligned}$$

Le schéma de discrétisation général du modèle de courant suivant  $\vec{x}$  s'écrit:

$$\sum_{k \in \mathcal{N}_{x b}} M_{x k} Q_k = \sum_{p=1}^5 M_{x p} Q_p + \sum_{l=6}^9 M_{x l} Q_l = D_x \quad (3.35)$$

où les coefficients de pondération  $M_{x p}$ ,  $M_{x l}$  et le second membre  $D_x$  sont déterminés en fonction de chacun des termes discrétisés.

### a. inertie

Pour le schéma temporel (Q:1), le terme inertiel est déterminé par:

$$\frac{1}{\Omega_{x i,j}} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega_{x i,j}} Q_x d\Omega = \frac{Q_{x i,j}^{n+1} - Q_{x i,j}^n}{dt} \quad (3.36)$$

Le terme inertiel vient pondérer uniquement le noeud central du schéma et le second membre du schéma. Le terme (3.36) se met sous la forme:

$$M_{x a 1} Q_1 - D_{a x}$$

### b. convection

Le terme convectif est donné par:

$$\frac{1}{\Omega_{x i,j}} \oint_{\Gamma_{x i,j}} \vec{F} d\Gamma = \frac{F_x|_{g g i,j} - F_x|_{g g i-1,j}}{d x g_{i,j}} + \frac{F_y|_{c c i,j+1} - F_y|_{c c i,j}}{d y c_{i,j}} \quad (3.37)$$

avec

$$\begin{aligned} F_x|_{gg\,i,j} &= Q_x|_{gg\,i,j}^{n+1} \left[ \frac{Q_x|_{gg\,i,j}}{h_{i,j}} \right]^* \\ F_y|_{cc\,i,j} &= Q_x|_{cc\,i,j}^{n+1} \left[ Q_y|_{cc\,i,j} \frac{1}{h} \Big|_{cc\,i,j} \right]^* \end{aligned} \quad (3.38)$$

Le terme convectif ne vient pondérer que les noeuds principaux du schéma puisqu'en utilisant les interpolations, la discrétisation du terme convectif se met sous la forme:

$$\sum_{p=1}^5 M_{x\,b\,p} Q_p$$

### c. pression hydrostatique

Le terme de pression hydrostatique est donné par:

$$\frac{1}{\Omega_{x\,i,j}} \int_{\Omega_{x\,i,j}} g h^* \frac{\partial \Phi}{\partial x} d\Omega = g h^*|_{cg\,i,j} \frac{\Phi_{i,j} - \Phi_{i-1,j}}{dx\,g_{i,j}} \quad (3.39)$$

avec

$$\Phi_{i,j} = h_{i,j}^{n+1} + Z_{f\,i,j}$$

où  $h_{i,j}^{n+1}$  est donné par la discrétisation (3.34). La contribution de la forme du fond  $Z_f$  n'intervient qu'au second membre du schéma. La discrétisation du terme de pression hydrostatique se met sous la forme:

$$\sum_{p=1}^3 M_{x\,c\,p} Q_p + \sum_{l=6}^9 M_{x\,c\,l} Q_l - D_{c\,x}$$

### d. frottement sur le fond

Le terme lié à la force de friction sur le fond est donné par:

$$\frac{1}{\Omega_{x\,i,j}} \int_{\Omega_{x\,i,j}} K_f^* \Phi_x d\Omega = K_f^*|_{cg\,i,j} \Phi_{x\,i,j} \quad (3.40)$$

avec

$$\Phi_{x\,i,j} = Q_{x\,i,j}^{n+1} + \tilde{Q}_{x\,i,j}$$

La contribution du débit total  $Q_x^{n+1}$  vient pondérer uniquement le noeud central du schéma, tandis que la contribution du débit induit par la houle  $\tilde{Q}_x$  n'intervient qu'au second membre du schéma. La discrétisation du terme de frottement sur le fond se met sous la forme:

$$M_{x\,d\,1} Q_1 - D_{d\,x}$$

### e. diffusion turbulente

Le terme de diffusion turbulente est donné en suivant la discrétisation (3.37) avec:

$$\begin{aligned} F_x|_{gg i,j} &= 2.[K_m h]_{i,j}^* \frac{U_{x i+1,j}^* - U_{x i,j}^*}{dxc_i} \\ F_y|_{cc i,j} &= [K_m h]_{i,j}^* \left( \frac{U_{x i,j}^* - U_{x i,j-1}^*}{dyg_j} + \frac{U_{y i,j}^* - U_{y i-1,j}^*}{dxg_i} \right) \end{aligned} \quad (3.41)$$

où la vitesse  $\vec{U}^*$  est définie par:

$$U_{x i,j}^* = \frac{1}{h^*} \Big|_{cg i,j} (Q_{x i,j}^{n+1} - \tilde{Q}_{x i,j}) \quad (3.42)$$

$$U_{y i,j}^* = \frac{1}{h^*} \Big|_{gc i,j} (Q_{y i,j}^{n+1} - \tilde{Q}_{y i,j}) \quad (3.43)$$

La contribution du débit induit par la houle  $\vec{Q}$  n'intervient qu'au second membre du schéma, par contre, la contribution du débit total permet de coupler les 9 noeuds du schéma. La discrétisation du terme de diffusion turbulente se met sous la forme:

$$\sum_{p=1}^5 M_{xep} Q_p + \sum_{l=6}^9 M_{xel} Q_l - D_{ex}$$

### f. tensions de radiation

Le terme de tensions de radiation est donné en suivant la discrétisation (3.37) avec:

$$\begin{aligned} F_x|_{gg i,j} &= \frac{1}{\rho} S_{xx}|_{gg i,j} \\ F_y|_{cc i,j} &= \frac{1}{\rho} S_{xy}|_{cc i,j} \end{aligned} \quad (3.44)$$

Le terme de tensions de radiation induit par la houle n'intervient qu'au second membre du schéma. La discrétisation du terme de diffusion turbulente se met sous la forme:

$$-D_{fx}$$

### Conservation de la quantité de mouvement suivant $\vec{y}$

L'équation de conservation de la quantité de mouvement (3.28) est projetée sur la direction  $\vec{y}$  et discrétisée sur le volume de contrôle vectoriel des composantes longitudinales  $\Omega_{x i,j}$ . Comme pour la discrétisation suivant  $\vec{x}$ , le schéma est discrétisé par une méthode



Figure 3.6 : Schéma de définition du schéma suivant  $y$ .

centrée qui fait intervenir localement 9 inconnues. L'ensemble  $\mathcal{N}_{yb}$  de ces 9 noeuds de base est illustré sur la figure 3.6.

5 noeuds principaux concernent directement les inconnues  $Q_y^{n+1}$  tandis que 4 noeuds supplémentaires permettent de rendre de compte des couplages transversaux avec les inconnues  $Q_x^{n+1}$ . Elles sont baptisées de la même façon que sur l'axe  $\vec{x}$  car les relations géométriques entre les noeuds sont identiques:

$$\begin{aligned}
 Q_1 &= Q_{yi,j}^{n+1} & Q_{10} &= Q_{xi,j}^{n+1} \\
 Q_2 &= Q_{yi+1,j}^{n+1} & Q_{11} &= Q_{xi+1,j}^{n+1} \\
 Q_3 &= Q_{yi-1,j}^{n+1} & Q_{12} &= Q_{xi,j-1}^{n+1} \\
 Q_4 &= Q_{yi,j+1}^{n+1} & Q_{13} &= Q_{xi+1,j-1}^{n+1} \\
 Q_5 &= Q_{yi,j-1}^{n+1}
 \end{aligned}$$

Le schéma de discrétisation général du modèle de courant suivant  $\vec{y}$  s'écrit:

$$\sum_{k \in \mathcal{N}_{yb}} M_{yk} Q_k = \sum_{p=1}^5 M_{yp} Q_p + \sum_{l=10}^{13} M_{yl} Q_l = D_y \quad (3.45)$$

où les coefficients de pondération  $M_{yp}$ ,  $M_{yl}$  et le second membre  $D_y$  sont déterminés en fonction de chacun des termes discrétisés.

La démarche est similaire à la discrétisation suivant  $\vec{x}$  (cf. annexe F).

### 3.2.4 Conditions limites

Une des difficultés majeures de la simulation numérique est de résoudre correctement le problème dans un domaine de calcul borné en espace. Pour cela, on doit formuler des

conditions aux limites sur tous les bords du domaine et une condition initiale. Au sens de Hadamard, les conditions pour qu'un problème soit bien posé sont établies si la solution dépend de façon continue de la condition initiale et des conditions limites. C'est-à-dire qu'une petite perturbation de ces conditions n'engendre qu'une petite variation de la solution en un point du domaine de calcul situé à une distance finie des frontières.

On applique le modèle de courant sur tous les noeuds vectoriels qui se trouvent à l'intérieur du domaine de calcul. Le couplage spatial de plusieurs inconnues nécessite de fermer le modèle par des conditions limites sur les bords de l'espace de résolution discret. La limite du domaine numérique est matérialisée par une ligne de noeuds scalaires, on doit alors résoudre les équations du modèle et vérifier la condition limite sur la frontière entre deux noeuds scalaires. La condition limite est appliquée localement sur le "noeud vectoriel limite". Le décalage des inconnues vectorielles introduit également un décalage du noeud limite. Ainsi, dans la direction normale à la frontière, le noeud limite correspond au noeud vectoriel supplémentaire extérieur au maillage scalaire. Dans la direction tangentielle, le noeud limite se trouve directement sur la frontière entre les noeuds scalaires (figure 3.3).

### Traitement des limites

Les conditions limites "classiques" de type Dirichlet, Neumann ou périodiques sont facilement implémentées dans la résolution implicite. Pour les conditions limites ouvertes, le découplage effectué entre le temps "physique" et le temps "numérique" lorsque  $CFL \gg 1$ , ne permet pas d'exploiter efficacement la théorie des caractéristiques (annexe D). Les conditions limites "ouvertes" sont alors traitées à l'aide des conditions classiques en vérifiant la réalité physique de l'écoulement. De ce fait, on utilise un domaine de calcul plus grand pour limiter l'influence des conditions limites ouvertes mal écrites sur les phénomènes physiques que l'on souhaite observer.

Généralement, le schéma de discrétisation des conditions limites s'appuie directement sur les 9 noeuds de base ( $\mathcal{N}_b$ ) exploités dans la discrétisation du modèle de courant. Cependant, pour réaliser certaines conditions limites (conditions périodiques, interpolations décentrées, etc.), il est nécessaire de rajouter des couplages avec des noeuds différents du schéma de base ( $\mathcal{N}_s$ ). Ce rajout local de dépendance est à limiter le plus possible car il change le conditionnement du problème et complique la résolution numérique finale.

La discrétisation des conditions limites pour la direction  $\vec{x}$  et  $\vec{y}$  s'écrit sous la forme

générale:

$$\sum_{k \in \mathcal{N}_{x_b} \cup \mathcal{N}_{x_s}} L_{xk} Q_k = E_x \quad (3.46)$$

$$\sum_{k \in \mathcal{N}_{y_b} \cup \mathcal{N}_{y_s}} L_{yk} Q_k = E_y \quad (3.47)$$

où les coefficients de pondération  $L_{.p}$  et le second membre  $E$  sont déterminés en fonction du type de la condition limite discrétisée (cf. annexe F).

### 3.3 Résolution numérique

Comme on l'a vu dans l'étape de couplage débit liquide-hauteur d'eau, la résolution du modèle de courant se ramène à la résolution d'un système de deux équations aux dérivées partielles dont les 2 inconnues  $Q_x^{n+1}$  et  $Q_y^{n+1}$  sont couplées. Les discrétisations spatiales de ces deux équations sont données par les schémas (3.35) et (3.45), et des conditions limites associées sont données par les schémas (3.46) et (3.47). Le problème complet se traduit donc par deux relations discrètes à résoudre localement en  $(i, j)$ :

$$\begin{aligned} A_{x1,i,j} Q_{x i,j}^{n+1} &+ A_{x2,i,j} Q_{x i+1,j}^{n+1} + A_{x3,i,j} Q_{x i-1,j}^{n+1} + A_{x4,i,j} Q_{x i,j+1}^{n+1} + A_{x5,i,j} Q_{x i,j-1}^{n+1} \\ &+ A_{x6,i,j} Q_{y i,j}^{n+1} + A_{x7,i,j} Q_{y i-1,j}^{n+1} + A_{x8,i,j} Q_{y i,j+1}^{n+1} + A_{x9,i,j} Q_{y i-1,j+1}^{n+1} \\ &+ A_{x14,i,j} Q_{x i+k_p,j}^{n+1} + A_{x15,i,j} Q_{x i-k_p,j}^{n+1} = B_{x i,j} \end{aligned} \quad (3.48)$$

$$\begin{aligned} A_{y1,i,j} Q_{y i,j}^{n+1} &+ A_{y2,i,j} Q_{y i+1,j}^{n+1} + A_{y3,i,j} Q_{y i-1,j}^{n+1} + A_{y4,i,j} Q_{y i,j+1}^{n+1} + A_{y5,i,j} Q_{y i,j-1}^{n+1} \\ &+ A_{y10,i,j} Q_{x i,j}^{n+1} + A_{y11,i,j} Q_{x i+1,j}^{n+1} + A_{y12,i,j} Q_{x i,j-1}^{n+1} + A_{y13,i,j} Q_{x i+1,j-1}^{n+1} \\ &+ A_{y14,i,j} Q_{y i+k_p,j}^{n+1} + A_{y15,i,j} Q_{y i-k_p,j}^{n+1} = B_{y i,j} \end{aligned} \quad (3.49)$$

où les coefficients en facteur des inconnues locales et les seconds membres sont déterminés en fonction du modèle général et des conditions limites ( $A_k = M_k + L_k$  et  $B_k = D_k + E_k$ ).

Pour résoudre le problème global sur tout l'écoulement, les relations locales (3.48) et (3.49) doivent être résolues en même temps. On range toutes les inconnues  $Q_{x i,j}^{n+1}$  et  $Q_{y i,j}^{n+1}$  dans un unique vecteur  $x$  défini par:

$$\begin{aligned} x(l) &= Q_{x i,j} \quad \text{pour } l = i + 1 + j(LM + 1) \\ x(l) &= Q_{y i,j} \quad \text{pour } l = (LM + 1)(MM + 1)i + 1 + j(LM + 1) \end{aligned}$$

avec  $(0, 0) \leq (i, j) \leq (LM, MM)$ .

La solution discrète du modèle de courant correspond à la solution du système matriciel:

$$Ax = b \quad (3.50)$$

Pour le résoudre, il est indispensable d'utiliser des méthodes numériques rapides et robustes. Même s'il existe de plus en plus de bibliothèques mathématiques installées sur la plupart des ordinateurs et qui offrent de nombreux programmes de résolution, la mise en oeuvre d'un algorithme n'est pas aussi directe. Le choix d'une méthode repose sur différents critères: généralité d'application, précision, stabilité vis à vis des erreurs d'arrondi, rapidité de calcul, volume de la place mémoire, etc... Chacun de ces critères a un poids qui dépend du problème à traiter et du type d'utilisation envisagée. Saad et Van der Vorst (1999), [111], proposent un condensé des principaux développements, en matière de méthodes itératives pour résoudre les systèmes linéaires.

### 3.3.1 Grands systèmes linéaires creux

La figure 3.7 montre une écriture condensée de toutes les équations sous forme matricielle. On remarque que des modifications locales de la discrétisation peuvent entraîner une augmentation du nombre de diagonales non nulles et rendre ce grand système linéaire creux plus difficile à résoudre; c'est le cas des conditions limites périodiques.

Pour minimiser la mémoire utilisée, la matrice *COEF* ne contient que les diagonales non nulles de *A*. Par contre, on définit un nouveau vecteur (*IOFF(l)*) qui contient les décalages de chaque diagonale par rapport à la diagonale centrale. *COEF* et *IOFF* permettent ainsi de réaliser le produit matrice-vecteur sans prendre en compte la multitude de zéros présents initialement dans le système linéaire. Cette façon de ranger les matrices creuses n'est pas unique, Théodor et Lascaux (1986), [133] en présentent d'autres. Une fois que la matrice des coefficients (*COEF*) est remplie, et que le second membre ( $b = RHS$ ) est mis à jour, on doit résoudre:

$$COEF * SOL = RHS$$

Ici encore la méthode n'est pas unique, Théodor et Lascaux (1987), [134], Saad et Van der Vorst (1999), [111], exposent les principales méthodes employées dans la résolution des systèmes linéaires en général.

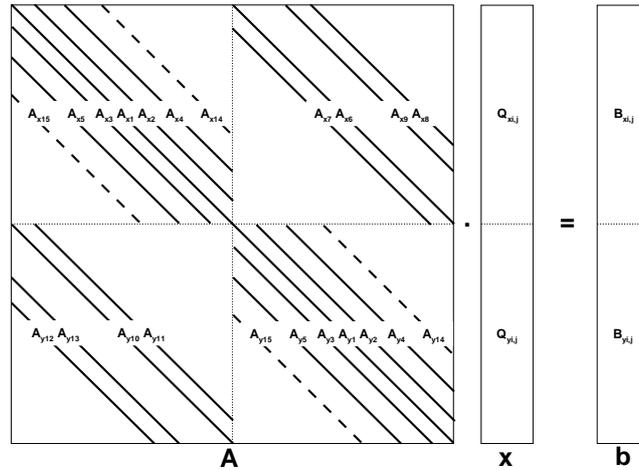


Figure 3.7 : Représentation matricielle du système linéaire creux issu de la discrétisation; (—) diagonale non nulle, (---) diagonale spécifique aux conditions limites périodiques.

### 3.3.2 Préconditionnement et solveur

Le plus souvent, la résolution du système linéaire par inversion de la matrice est trop coûteuse en temps de calcul. Une stratégie plus efficace est d'utiliser consécutivement un préconditionnement pour mieux poser le système matriciel à résoudre puis un solveur pour accélérer la convergence du calcul.

#### Préconditionnement

Se borner à une seule méthode de résolution n'est pas satisfaisant, car en fonction du cas à traiter, la matrice  $A$  peut être initialement plus ou moins bien conditionnée. La précision des résultats obtenus et leur sensibilité soit aux perturbations sur les données, soit aux erreurs d'arrondi commises durant les calculs, peuvent être estimées au travers du conditionnement.

Le nombre de conditionnement  $K(A)$  d'une matrice carrée inversible  $A$  est défini comme le rapport de la plus grande sur la plus petite des valeurs singulières de  $A$ . La rapidité de la convergence des méthodes de descente, notamment celle du gradient conjugué, dépend du nombre de conditionnement de la matrice  $A$ . Plus  $K(A)$  est proche de 1,

plus vite l'algorithme convergera.

Le principe de préconditionnement d'une matrice  $A$  consiste à remplacer la résolution de l'équation (3.50) par celle du système équivalent

$$M^{-1}Ax = M^{-1}b$$

La matrice  $M^{-1}$  doit être choisie avec l'objectif que  $K(M^{-1}A)$  soit beaucoup plus petit que  $K(A)$ . En théorie, le meilleur choix est donc  $M^{-1} = A^{-1}$  car alors  $K(M^{-1}A) = 1$ . Cependant, en pratique, il faudra trouver  $M^{-1}$  le plus proche de  $A^{-1}$ , sans que les calculs pour  $M^{-1}$  ne soient trop coûteux.

Dans l'annexe E, on présente les principaux préconditionnements utilisés pour faciliter la résolution des systèmes linéaires. On présente les raisons du choix de la méthode ILUD pour traiter le modèle de courant dans le dernier paragraphe.

### Solveurs itératifs

Les méthodes itératives peuvent s'écrire de façon simple:

$$x^{(k)} = Px^{(k-1)} + c$$

Lorsque ni  $P$  ni  $c$  ne dépendent du niveau d'itération  $k$ , la méthode est dite "stationnaire" (Jacobi, SOR, etc.). Dans le cas contraire, elle fait partie des méthodes instationnaires, comme par exemple les méthodes basées sur le gradient conjugué (CG, Bi-CG, etc.).

Le résidu de la méthode permet de suivre la convergence de la méthode itérative, il est défini comme la différence entre la solution exacte et la solution approchée du système linéaire (3.50):

$$r^{(k)} = b - Ax^{(k)} \tag{3.51}$$

Dans l'annexe E, on décrit succinctement les principales méthodes que l'on a testées et employées pour résoudre le modèle de courant avec une préférence pour la méthode BiCGSTAB.

### Choix des méthodes de résolution

L'objectif du modèle numérique implicite est d'obtenir la solution stationnaire du modèle de courant moyen. Pour cela, il est important de déterminer un bon compromis

entre le nombre de pas de temps nécessaire pour atteindre la solution stationnaire et le nombre d'itérations du solveur pour limiter le temps de calcul global. Cette optimisation passe donc par le réglage des paramètres de contrôle du modèle numérique comme la CFL et les paramètres du préconditionnement tout en vérifiant la qualité de la solution. Au final, on utilise une CFL supérieure à 10 avec une centaine d'itérations de solveur.

On peut utiliser le préconditionnement ILU(0), mais on lui préfère une méthode plus robuste mais plus lente comme ILUD avec une tolérance d'élimination de  $2 \cdot 10^{-3}$  et un facteur de compensation de 0.5. Ce choix s'appuie sur le fait qu'avec ILU(0), la solution obtenue avant convergence totale (le résidu de la méthode est de l'ordre de la précision machine, *i.e.*  $o(Res) = 10^{-15}$ ) de la méthode itérative n'est pas symétrique. Cette solution dissymétrique étant utilisée comme référence pour les pas de temps suivants à la fois dans la matrice  $A$  et dans le second membre  $B$  du système linéaire, les dissymétries de la solution numérique peuvent être amplifiées dans la résolution des modèles couplés.

En effet, pour 1 pas de temps avec le préconditionnement ILU(0), au bout de 100 itérations du solveur, le résidu n'est que de  $10^{-4}$  et la solution obtenue n'est pas symétrique. Au cours de l'avance temporelle, le résidu de la solution décroît mais une fois le critère de stationnarité (cf. § 3.3.3) atteint, le résidu n'est toujours pas optimal  $o(Res) = 10^{-7}$ . On observe ainsi qu'en-dessous d'un certain nombre d'itérations du solveur, le résidu de la solution est trop important et déstabilise la solution au cours du temps: le calcul peut diverger.

L'utilisation du préconditionnement ILUD permet de pallier à cet inconvénient de la méthode ILU(0). En effet, pour un même cas, le résidu de la solution obtenu avec ILUD à chaque pas de temps est optimal et les calculs qui suivent gardent toutes leurs propriétés de convergence.

Dans tous les problèmes hydrodynamiques, on peut utiliser les solveurs FOM, BiCG-STAB ou GMRES(10). Toutes ces méthodes sont satisfaisantes, le plus souvent on utilise la méthode BiCGSTAB. On note que dans certains cas, le solveur FOM est légèrement plus rapide.

### 3.3.3 Critère de stationnarité des courants moyens

La résolution du modèle hydrodynamique est arrêtée lorsque la solution stationnaire des courants moyens est atteinte. Cependant, dans certains cas, cette solution est difficile à obtenir à la précision machine. On considère alors que la solution stationnaire est atteinte

dès que l'écart sur les courants moyens, entre deux pas hydrodynamique, est négligeable devant le courant de compensation:

$$C_s = \frac{|U^{n+1} - U^n|}{\tilde{Q}/h^{n+1}} \quad (3.52)$$

Sur la figure 3.8, on a représenté l'évolution du critère  $C_s$  en fonction du nombre d'itérations dans différentes configurations d'écoulements. On précise que l'intensité de la contrainte de frottement sur le fond joue un rôle important dans la vitesse de convergence de la solution vers une solution stationnaire; plus cette résistance est importante et plus la solution converge rapidement. De même, le champ de courant moyen initial influence la convergence de la solution; une condition initiale très éloignée de la solution stationnaire retarde la convergence.

Dans les applications au littoral aquitain présentées dans le chapitre 5, on retient une précision  $C_s < 1\%$  pour simuler la morphodynamique sédimentaire de la plage.

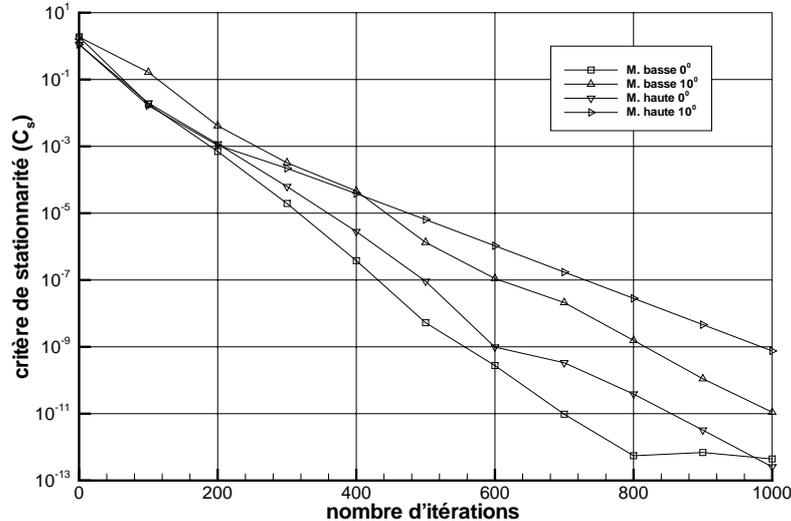


Figure 3.8 : Evolution du critère de stationnarité  $C_s$  en fonction du nombre d'itérations du modèle de courants moyens, pour différentes configurations d'écoulements: marée haute, marée basse, houle frontale, houle oblique à  $10^\circ$ .

## 3.4 Validations

Dans ce chapitre, on a présenté la méthode numérique utilisée pour obtenir les solutions stationnaires des courants moyens. En adaptant le pas de temps, ce modèle numérique permet aussi de décrire les régimes transitoires instationnaires “physiques”. Cette souplesse du modèle permet d’étendre son utilisation au problème des ondes infragravitaires générées par les vagues. Les validations suivantes cherchent donc à mettre en évidence les bonnes capacités du modèle numérique à converger rapidement vers des solutions stationnaires. Cette section présente également des cas purement instationnaires pour vérifier le traitement des termes non-linéaires, jusqu’à la formation de chocs propagatifs, mais ces cas sortent du cadre des applications initiales de ce modèle numérique.

D’abord, on propose des cas tests concernant l’utilisation du modèle pour des problèmes instationnaires d’ondes longues. On montre ainsi que le couplage numérique débit-hauteur d’eau permet d’obtenir les solutions non-linéaires du modèle hydrodynamique 2DH. Ces tests montrent les limites d’application du modèle, car celui-ci n’a pas été développé spécialement pour résoudre des propagations d’ondes. Par ailleurs, on sait que pour traiter ce genre d’écoulement, il est préférable d’utiliser des schémas à limiteur (TVD, ENO) (Vincent et al. (2001), [108]; Yee (1987), [151]; Shu et Osher (1989), [118]).

Ensuite, on présente des cas d’écoulements 2DH stationnaires sur fond horizontal, oblique et sur des bathymétries localement perturbées. On montre ainsi la bonne résolution du modèle sur des maillages irréguliers et sur une bathymétrie variable, ainsi que la bonne prise en compte du forçage par la houle.

Sur chaque cas test, la convergence de la solution numérique  $\Phi_N$  est analysée pour déterminer l’ordre de la méthode en espace. On représente l’évolution de l’erreur  $E$  en fonction du nombre de degrés de liberté  $N = \sqrt{LM * NM}$  dans le diagramme  $\ln(E) = f(\ln(N))$ . L’ordre  $\alpha$  de la méthode est alors déterminé par la pente de la droite (au signe près).

Si on connaît la solution analytique  $\Phi_a$  du problème, on calcule l’erreur relative  $E_p$ :

$$E_p = \frac{\|\Phi_a - \Phi_N\|_p}{\|\Phi_a\|_p}$$

où les normes sont définies par:

$$\begin{aligned}\|\Phi\|_\infty &= \text{Max}|\Phi| \\ \|\Phi\|_p &= \left( \iint \Phi^p dx dy \right)^{\frac{1}{p}}\end{aligned}$$

Si on ne connaît pas à priori la solution exacte du problème, on suppose que la solution numérique converge vers une solution de référence  $\Phi_r$  suivant la relation:

$$\Phi_N = \Phi_r + CN^{-\alpha}$$

l'ordre de la méthode est obtenu par l'extrapolation de Richardson sur 3 maillages (au moins) ainsi que la constante  $C$  et la solution de référence:

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{1}{\ln\left(\frac{N_1}{N_2}\right)} \ln\left(\frac{\Phi_{N_2/2} - \Phi_{N_2}}{\Phi_{N_1/2} - \Phi_{N_1}}\right) \\ C &= \frac{\Phi_N - \Phi_{N/2}}{N^{-\alpha}(1 - 2^\alpha)} \\ \Phi_r &= \Phi_N - \frac{\Phi_N - \Phi_{N/2}}{(1 - 2^\alpha)}\end{aligned}$$

Pour les solutions instationnaires, on précise que l'erreur calculée prend en compte les erreurs de discrétisations spatiales et temporelles.

### 3.4.1 Propagation des ondes longues

Dans cette partie, on rassemble les cas de propagation des ondes longues, en absence de vagues en régime sous-critique, pouvant être décrites par le modèle de courant 2DH. On traite des cas linéaires et non-linéaires, dans des configurations d'écoulement 1D et 2D, sur fond plat et sur fond perturbé. Les équations qui régissent l'écoulement sont données par:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (h\vec{U}) = 0$$

$$\frac{\partial h\vec{U}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (h\vec{U} \otimes \vec{U}) + gh\vec{\nabla}(Z_s) = 0$$

En 1D sur fond plat ( $\vec{\nabla}(Z_s) = \vec{\nabla}(h)$ ), on peut montrer que le problème non-linéaire se ramène à un système de deux équations de transport:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \phi^+}{\partial t} + c^+ \frac{\partial \phi^+}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial \phi^-}{\partial t} + c^- \frac{\partial \phi^-}{\partial x} &= 0\end{aligned}\tag{3.53}$$

avec les invariants de Riemann non-linéaires  $\phi^+ = U + 2\sqrt{gh}$  et  $\phi^- = U - 2\sqrt{gh}$ , et les vitesses caractéristiques  $c^+ = U + \sqrt{gh}$  et  $c^- = U - \sqrt{gh}$ . En régime sous critique  $U < \sqrt{gh}$ , la solution de (3.53) est constituée de deux ondes non-linéaires indépendantes qui se propagent dans des directions opposées aux vitesses  $c^+$  et  $c^-$ .

La linéarisation du problème permet d'obtenir une solution théorique sur les petites variations "1" autour d'un écoulement de référence constant "0":

$$\begin{aligned}U &= U_0 + U_1 \\ h &= h_0 + h_1 \\ Z_f &= -h_0 + Z_{f1} \\ Z_s &= h_1 + Z_{f1} = Z_{s1}\end{aligned}$$

Ainsi, lorsque le fond n'est pas plat, Baines (1995), [9] montre que la surface libre doit vérifier l'équation d'ondes:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U_0 \frac{\partial}{\partial x}\right)^2 Z_{s1} - c_0^2 \frac{\partial^2 Z_{s1}}{\partial x^2} = U_0^2 \frac{\partial^2 Z_{f1}}{\partial x^2}\tag{3.54}$$

avec  $c_0 = \sqrt{gh_0}$ . La solution analytique est alors donnée par:

$$Z_{s1}(x, t) = \frac{F_0^2}{F_0^2 - 1} Z_{f1}(x) + \frac{1}{2} \left( \frac{Z_{f1}(x - (U_0 + c_0)t)}{F_0 + 1} - \frac{Z_{f1}(x - (U_0 - c_0)t)}{F_0 - 1} \right)\tag{3.55}$$

avec le nombre de Froude de référence  $F_0 = U_0/\sqrt{gh_0}$ .

Pour décrire ces ondes longues avec le modèle numérique, on se place à une  $CFL = c^+ \frac{dt}{dx} = \frac{1}{2} < 1$ .

### Onde linéaire 1D sur fond plat

Dans ce test, on considère la propagation d'une onde de surface gaussienne de faible amplitude devant la profondeur dans un canal rectiligne au repos (figure 3.9).

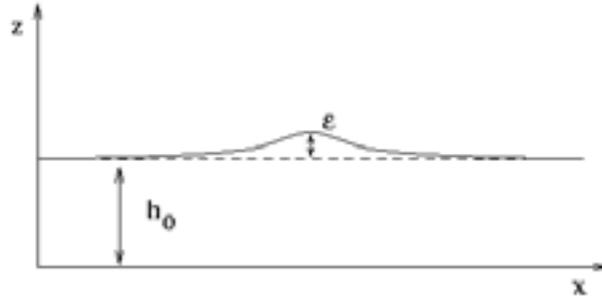


Figure 3.9 : Schéma de l'onde linéaire sur fond plat.

La vitesse de référence est nulle  $U_0 = 0$  et la hauteur d'eau de référence  $h_0$  est uniforme. La hauteur d'eau analytique du problème est donnée par:

$$h(x, t) = h_0 + \epsilon \cdot \exp\left[-\left(\frac{x - x_0 - \sqrt{gh_0}t}{\sigma}\right)^2\right] \quad (3.56)$$

Le champ de vitesse est donné par:

$$U(x, t) = U_1(x, t) = \sqrt{g/h_0} \cdot \epsilon \cdot \exp\left[-\left(\frac{x - x_0 - \sqrt{gh_0}t}{\sigma}\right)^2\right] \quad (3.57)$$

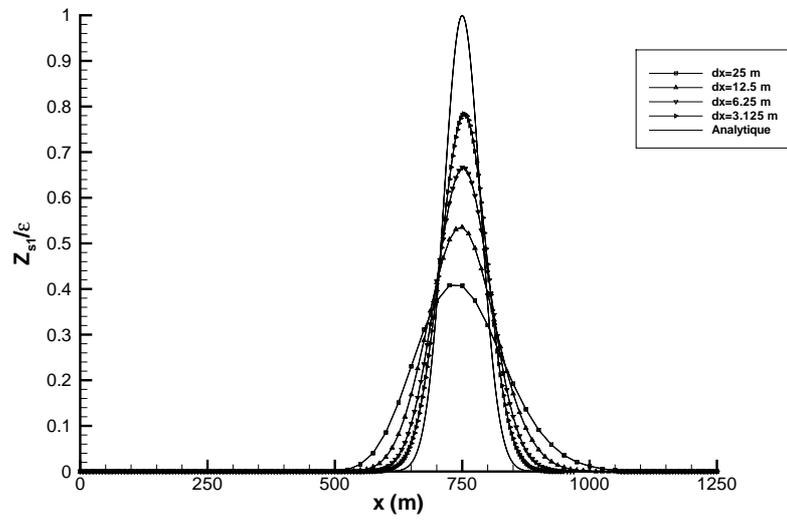
avec les paramètres suivants :

$$\left\{ \begin{array}{l} h_0 = 100/g \text{ m} \\ \epsilon = 0.01 h_0 \\ \sigma = 50 \text{ m} \\ x_0 = 250 \text{ m (position initiale de la crête de l'onde)} \end{array} \right.$$

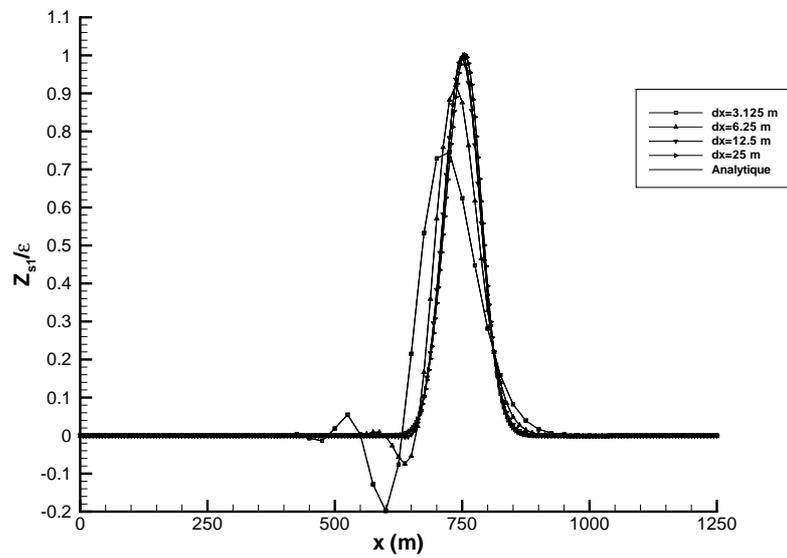
La solution numérique est calculée dans un canal périodique. Le modèle reproduit bien la propagation de l'onde linéaire puisque la solution numérique converge vers la solution analytique (figures 3.10a et 3.10b). La méthode (Q:2,H:2) diffuse très peu par rapport au schéma (Q:1,H:1) mais elle introduit des phénomènes de dispersion numérique rapidement atténués si on raffine le maillage. Ce comportement dispersif se retrouve également avec un schéma classique du type McCormack sans correction des flux.

On constate que l'invariant de Riemann  $\Phi^+$  est convecté à la bonne vitesse. Par contre, on note que la discrétisation spatiale sur maillage décalé introduit des erreurs sur la condition initiale, la solution ne respecte pas parfaitement la condition  $\Phi^- = 0$ . Cependant cet invariant est initialement très petit et le reste au cours du temps. De ce fait, aucune onde parasite ne remonte l'écoulement.

Dans ce cas de validation, l'ordre de la discrétisation temporelle des termes non-linéaires (NL:1,NL:2) a peu d'influence sur la solution, quelle que soit la méthode utilisée (Q:1,H:1) ou (Q:2,H:2). On a calculé la solution sur quatre maillages différents pour en déduire l'ordre des méthodes. On constate que l'ordre de convergence de la méthode (Q:1,H:1) est voisin de 0.5 et augmente avec le nombre de noeuds. Cela signifie que pour diviser l'erreur par rapport à la solution exacte du problème par 10, il faut diviser le pas d'espace par 100. Par contre, l'ordre de convergence de la méthode (Q:2,H:2) est voisin de 2. Cela signifie que pour diviser l'erreur par 100, il suffit de diviser le pas d'espace par 10.



(a) schéma (Q:1,H:1,NL:1)



(b) schéma (Q:2,H:2,NL:2)

Figure 3.10 : Profil de la surface libre adimensionnée à  $t = 50$  s, pour une  $CFL=0.5$ , pour des discrétisations spatiales différentes.

### Onde linéaire 1D sur un relief

On considère un écoulement 1D à débit constant au-dessus d'une dune sous-marine gaussienne (figure 3.11).

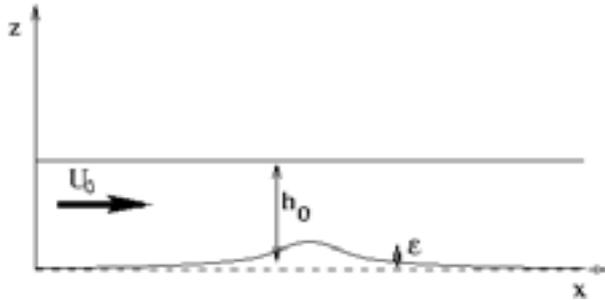


Figure 3.11 : Schéma de l'écoulement sur un relief.

La perturbation du fond est faible devant la profondeur. La surface libre initiale est donnée pour une hauteur d'eau constante. Celle-ci est définie par :

$$Z_s(x, 0) = Z_{f1}(x) = \epsilon \cdot \exp\left[-\left(\frac{x - x_0}{\sigma}\right)^2\right]$$

et les paramètres suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} h_0 = 100/g \text{ m} \\ \epsilon = 0.01h_0 \\ \sigma = 50 \text{ m} \\ x_0 = 500 \text{ m (position de la crête de la dune)} \end{array} \right.$$

La solution analytique du problème est donnée par la relation (3.55). L'onde de surface est décrite par une partie stationnaire directement proportionnelle à la forme de la dune sous-marine est au régime d'écoulement, plus un régime transitoire dans lequel les ondes engendrées par l'obstacle sous-marin sont progressivement évacuées du domaine de calcul.

On utilise des conditions limites périodiques en supposant que le canal est suffisamment long, ou que le temps de simulation est suffisamment court pour que les ondes du régime transitoire n'interfèrent pas entre elles.

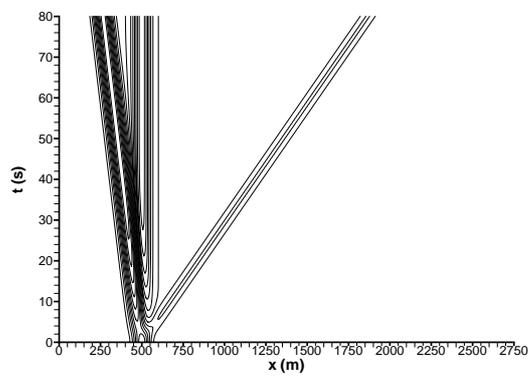
Les figures 3.12a et 3.12b montrent que l'on retrouve le même comportement ondulatoire du problème. Comme dans le cas de l'onde non-linéaire sur fond plat, on observe que l'onde initiale s'effondre pour donner naissance à deux ondes transitoires qui se propagent

dans des directions opposées. Ici cependant, ces deux ondes se déplacent à des vitesses différentes. En régime sous critique, l'onde "positive" s'évacue rapidement dans le courant alors que l'onde "négative" remonte le courant plus lentement. La présence du courant sur la dune sous-marine génère également une dépression stationnaire dans la surface libre.

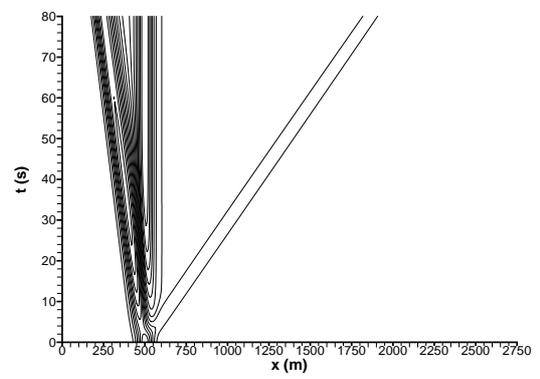
Comme on l'avait montré dans les cas précédents, les figures 3.13a et 3.13b confirment que les schémas oscillent au voisinage des ondes transitoires (particulièrement pour une discrétisation spatiale grossière). Les ondes propagatives sont légèrement amorties au cours du temps. Par contre, le creux dans la surface libre au-dessus de l'obstacle est bien défini sans diffusion au cours du temps. La bathymétrie de l'écoulement est donc bien prise en compte dans le modèle numérique.

Il est important de noter que l'ordre de discrétisation temporelle influence directement l'intensité de la dissipation du schéma (Q:1,H:1) ou l'importance des effets dispersifs (Q:2,H:2). De plus, on note que la discrétisation temporelle à l'ordre 1 des termes non-linéaires (NL:1) a tendance à stabiliser la méthode (Q:1,H:1), alors qu'elle déstabilise fortement la méthode (Q:2,H:2). Inversement, la discrétisation (NL:2) a tendance à déstabiliser la méthode (Q:1,H:1), alors qu'elle stabilise la méthode (Q:2,H:2). Il faut donc utiliser le même ordre de discrétisation en temps pour les termes inertiels et pour les termes non-linéaires.

Sur les trois maillages testés, les méthodes convergent en moyenne à l'ordre 0.5. Seule la méthode (Q:2,H:2,NL:2) converge plus rapidement à l'ordre 1 pour des maillages suffisamment fins.

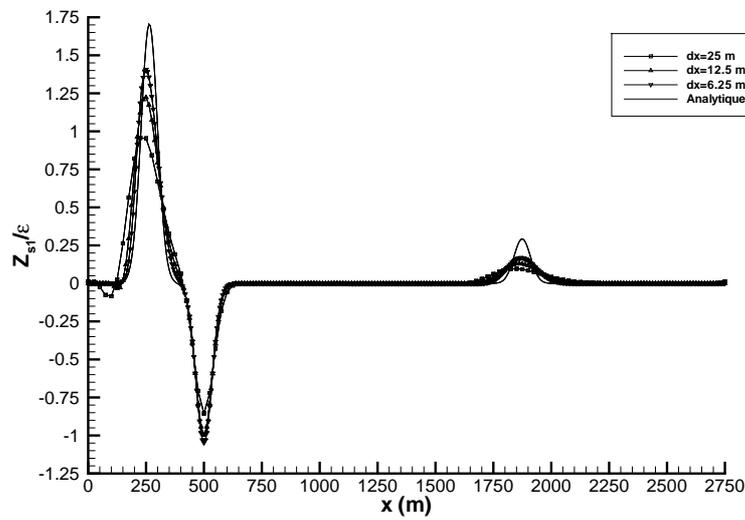


(a) exacte

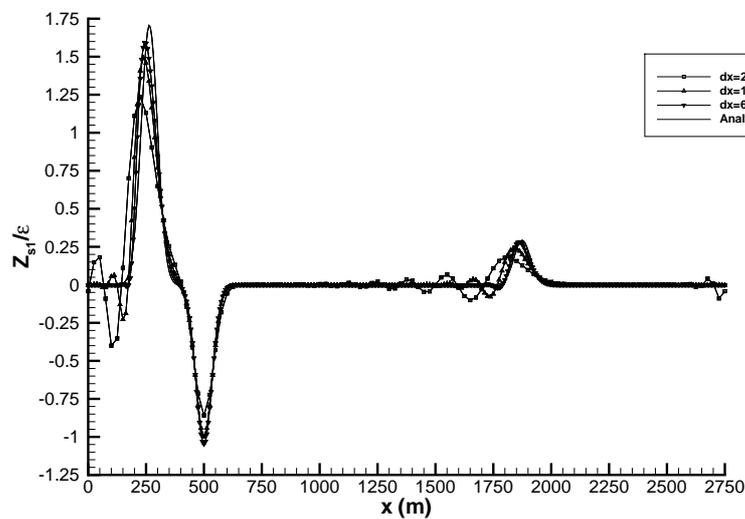


(b) schéma (Q:1,H:1,NL:1)

Figure 3.12 : Diagramme des caractéristiques (isovaleurs) de la surface libre dans le plan  $(x, t)$ .



(a) schéma (Q:1,H:1,NL:1)



(b) schéma (Q:2,H:2,NL:2)

Figure 3.13 : Profil de la surface libre adimensionnée à  $t_1 = 80.52$  s pour une  $CFL=0.5$  et pour des discrétisations spatiales différentes. La solution numérique est en accord avec la solution stationnaire (dépression centrée en  $x = 500$ m)

Onde non-linéaire 1D sur fond plat

Dans ce test, on considère la propagation d'une onde de surface non-linéaire lâchée sans vitesse initiale dans un canal rectiligne au repos (figure 3.14). L'intérêt de ce cas est de vérifier la bonne prise en compte des non-linéarités dans le modèle numérique. La hauteur d'eau est définie par:

$$h(x, t) = h_0 + \epsilon \cdot \exp\left[-\left(\frac{x - x_0}{\sigma}\right)^2\right] \tag{3.58}$$

et les paramètres suivant :

$$\begin{cases} h_0 = 50/g \text{ m} \\ \epsilon = h_0 \\ \sigma = 50 \text{ m} \\ x_0 = 500 \text{ m (position initiale de la crête de l'onde)} \end{cases}$$

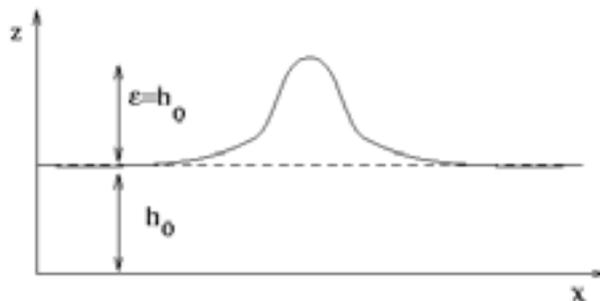


Figure 3.14 : Schéma de l'onde non-linéaire sur fond plat.

Sur la figure 3.16, on observe que l'onde initiale s'effondre de façon symétrique pour donner naissance à deux ondes progressives de directions opposées. La figure 3.15 montre que les lignes caractéristiques de la solution tendent à se rencontrer pour former un choc. Le modèle reproduit bien les effets non-linéaires puisque les ondes générées présentent un profil asymétrique typique. Comme la vitesse de l'onde augmente avec la hauteur d'eau on observe la formation d'une onde de choc avec un front assez raide et une onde de détente pour la queue de l'onde. Comme le décrit Lighthill (1978), [78], dès que le choc est formé, l'amplitude de l'onde diminue tout en conservant son volume initial. Ces effets sont bien représentés par le schéma (Q:2,H:2,NL:2) jusqu'au choc. Le raidissement de l'onde non-linéaire au niveau du choc accentue les effets dispersifs du schéma (Q:2,H:2,NL:2). Le

schéma (Q:2,H:2,LN:2) oscille fortement en présence du front, mais ce comportement est caractéristique des schémas d'ordre 2. Par contre, le schéma (Q:1,H:1,NL:1) diffuse la solution dès le départ, le choc reste doux et la solution reste stable.

Comme on l'a précisé avant, ce cas de validation sort du domaine d'application du modèle numérique qu'on a développé. On retiendra simplement de ce cas que les non-linéarités de la solution sont bien reproduites par le modèle numérique.

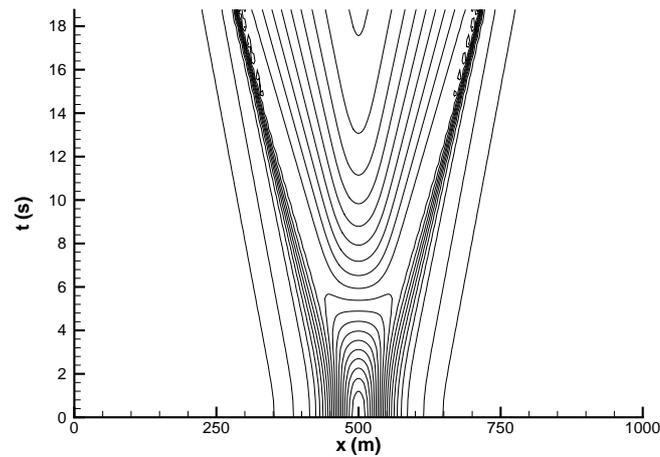


Figure 3.15 : Diagramme des caractéristiques (isovaleurs) de la surface libre dans le plan  $(x, t)$ ; schéma (Q:2,H:2,NL:2).

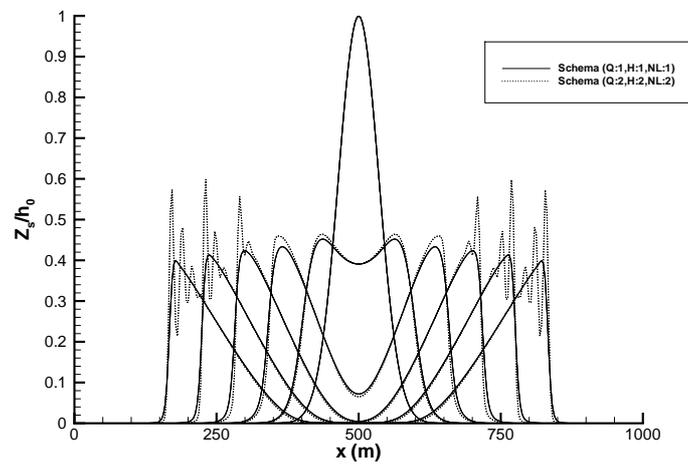


Figure 3.16 : Profil de la surface libre adimensionnée toutes les 6.25 s ( $dx = 3.125$  m).

### Onde non-linéaire 2D sur fond plat

Dans ce test on considère la propagation d'une onde gaussienne axisymétrique lâchée sans vitesse initiale dans un bassin au repos.

Dans ce cas test, la hauteur d'eau initiale est définie par:

$$h(r, 0) = h_0 + \epsilon \cdot \exp\left[-\left(\frac{r}{\sigma}\right)^2\right]$$

avec  $r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$  et les paramètres suivants :

$$\left\{ \begin{array}{l} h_0 = 100/g \text{ m} \\ \epsilon = h_0 \\ \sigma = 50 \text{ m} \\ (x_0, y_0) = (500, 500) \text{ m (position initiale de la crête de l'onde)} \end{array} \right.$$

La solution numérique est calculée sur un maillage cartésien périodique en  $x$  et avec des conditions de symétrie en  $y$ . Le temps de simulation est suffisamment court pour que l'onde n'atteigne pas les limites du domaine.

Sur les figures 3.17a et 3.17b, on observe que l'onde initiale s'effondre de façon axisymétrique pour donner naissance à une onde progressive circulaire. Les figures 3.17b et 3.18b montrent que les effets non-linéaires conduisent à la formation d'une onde dont le profil est asymétrique. A la différence du cas de l'onde non-linéaire 1D sur fond plat, la surface libre s'enfonce plus bas que le niveau du bassin au repos. Le schéma (Q:2,H:2,NL:2) permet de constater qu'une ondulation est générée sur l'axe de symétrie alors qu'elle est complètement diffusée par le schéma (Q:1,H:1,NL:1).

En utilisant la méthode de Richardson sur les quatre maillages testés, la méthode (Q:1,H:1,NL:1) converge en moyenne à l'ordre 0.3, tandis que la méthode (Q:2,H:2,NL:2) converge beaucoup plus rapidement, à l'ordre 4.

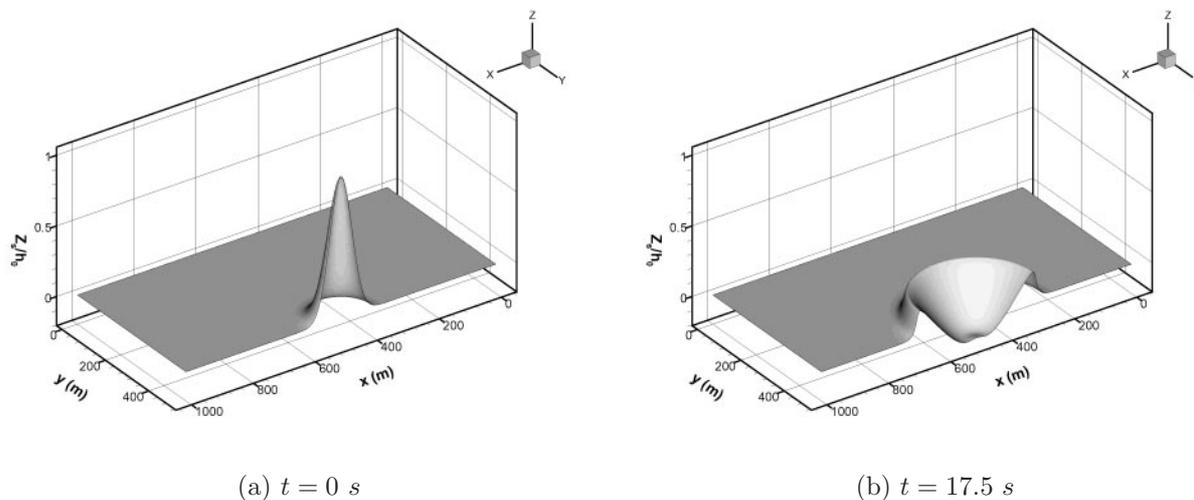


Figure 3.17 : Surface libre adimensionnée pour une  $CFL=0.5$  avec le schéma (Q:2,H:2,NL:2); représentation d'un demi domaine de calcul ( $dx=3.125 \text{ m}$ ).

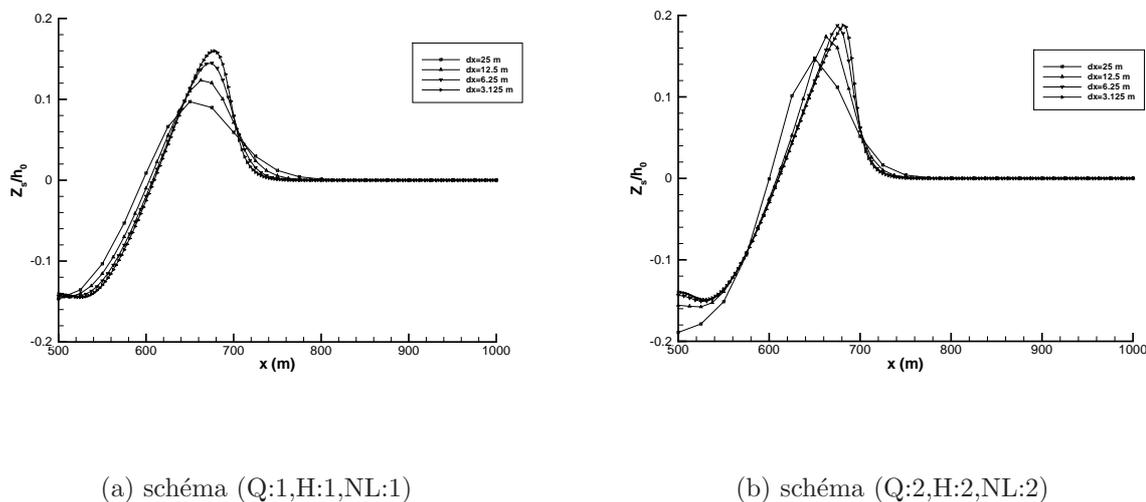


Figure 3.18 : Profil médian de la surface libre adimensionnée à  $t = 17.5 \text{ s}$  pour une  $CFL=0.5$  et pour des discrétisations spatiales différentes.

### 3.4.2 Écoulements 2D stationnaires

Dans cette partie, on présente des écoulements en 2D dont la solution stationnaire permet de tester les réelles capacités du modèle numérique. On traite un écoulement complexe sur un fond plat. On présente également le cas d'un écoulement sur une plage plane pour vérifier la bonne prise en compte du forçage par les vagues. Enfin, on décrit un écoulement uniforme en présence d'une dune sous-marine locale.

On cherche la solution stationnaire de ces écoulements avec une  $CFL = 10$ . On rappelle qu'avec une  $CFL > 1$ , il y a décorrélation entre le temps "physique" et le temps "numérique". Ainsi, la solution obtenue à un instant donné est a priori différente de celle calculée pour le même instant avec une  $CFL < 1$ .

#### Canal rectiligne avec un changement de largeur

Dans ce cas de validation, on considère un écoulement dans un canal rectiligne avec une restriction locale de la largeur due à un obstacle (figure 3.19).

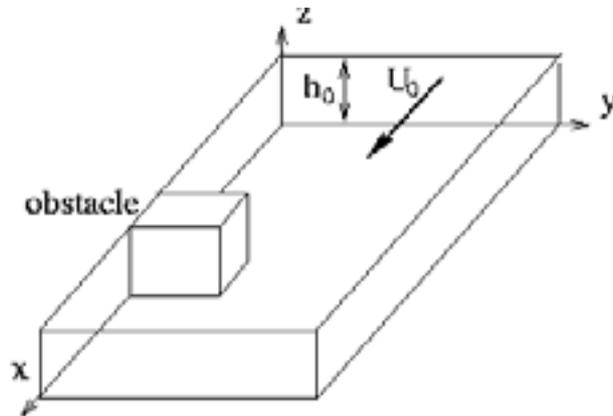


Figure 3.19 : Schéma du canal avec une restriction de section.

On a choisi ce cas pour obtenir l'ordre de convergence de la méthode sur une solution stationnaire complexe. L'écoulement est représenté par la solution stationnaire du système d'équations:

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (h\vec{U}) &= 0 \\ \frac{\partial h\vec{U}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (h\vec{U} \otimes \vec{U}) + gh\vec{\nabla}(h) + C_f \|\vec{U}\| \vec{U} \\ - \vec{\nabla} \cdot \left( K_m \left( [\vec{\nabla} \otimes h\vec{U}] + [\vec{\nabla} \otimes h\vec{U}]^T \right) \right) &= 0 \end{aligned}$$

Pour comparer qualitativement la solution numérique du modèle avec celle obtenue par Molls et al. (1995), [89], avec une méthode ADI complétée par un modèle de viscosité artificielle, on résout le problème dans un canal forcé en entrée par le débit de référence  $Q_0 = 0.047817 \text{ m}^2/\text{s}$  et “libre” en sortie (condition de Neumann). On applique des conditions limites latérales de glissement, par contre sur l’obstacle on impose l’adhérence. La hauteur d’eau de référence est fixée initialement à  $h_0 = 0.189 \text{ m}$ , on en déduit la vitesse du courant moyen de référence  $U_0 = 0.256 \text{ m/s}$ . La viscosité turbulente  $K_m = 0.0012 \text{ m}^2/\text{s}$  est uniforme dans tout le canal et le frottement sur le fond est paramétré avec le coefficient de Chézy  $C = \sqrt{g/C_f} = 76 \text{ m}^{1/2}/\text{s}$ . L’obstacle rectangulaire de longueur  $L_{x0} = 0.0456 \text{ m}$  et de largeur  $L_{y0} = 0.152 \text{ m}$  est positionné contre une paroi du canal en  $(x_0, y_0) = (2, 0)$ .

Comme le montre la figure 3.20, on a choisi un maillage irrégulier pour optimiser le nombre de noeuds à proximité de l’obstacle. Une zone de maillage régulier ( $dx_{min} = dy_{min}$ ) est positionnée autour de l’obstacle et un maillage irrégulier s’étend au delà. On a calculé la solution sur 4 maillages irréguliers du même type de plus en plus fins  $dx_{min}/L_{x0} = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8})$ . L’espace mémoire nécessaire est semblable pour les deux méthodes et il est de  $(13, 27, 78, 276)Mo$  respectivement pour les quatre maillages utilisés.

Les essais sur les différents maillages montrent que, à partir d’une condition initiale  $t_0 = 0 \text{ s}$ , la solution atteint son régime stationnaire à partir de  $t_s = 180 \text{ s}$ . On constate cependant que le schéma (Q:2,H:2,NL:2) atteint la solution stationnaire deux fois plus rapidement que le schéma (Q:1,H:1,NL:1). Par exemple, pour  $dx_{min}/L_{x0} = \frac{1}{4}$  le schéma (Q:1,H:1,NL:1) prend  $4h20min$  tandis que le schéma (Q:2,H:2,NL:2) prend  $2h18min$ . Dans la suite on a donc utilisé le schéma (Q:2,H:2,NL:2).

On observe sur la figure 3.21 qu’une zone tourbillonnaire se forme en aval de l’obstacle. La taille de la recirculation  $L$  est déterminée par la distance entre l’arrière de l’obstacle ( $x \approx 2.05$ ) et le point de retournement du débit longitudinal ( $Q_x = 0$ ).

Sur la figure 3.22 on observe qu’un bourrelet d’eau se forme en amont de l’obstacle et qu’une dépression apparaît en aval. On constate également que la hauteur d’eau est mal remise à jour sur la frontière. En effet, comme le montre la figure 3.23, le débit est

imposé à l'entrée et sa valeur est uniforme au début du canal donc la divergence du débit sur la frontière est nulle. Le couplage débit hauteur d'eau se traduit par un niveau d'eau inchangé par rapport à la condition initiale. Cette perturbation de la hauteur d'eau n'est que locale et elle n'affecte pas le reste du domaine de calcul.

La figure 3.23 met en évidence la convergence de la solution vers une longueur de recirculation constante. On a représenté sur la figure 3.24 l'erreur sur la longueur de recirculation en fonction du nombre de noeuds équivalent du maillage. La solution de référence est calculée par la technique de Richardson sur les trois maillages les plus fins, on trouve que la longueur de la recirculation converge vers  $L \approx 1.71 m$ . On constate que la convergence de la méthode n'est pas régulière pour des maillages grossiers, l'ordre de la méthode se stabilise ensuite pour les maillages plus fins; l'ordre de la méthode est estimé à 2.4.

La solution numérique est très voisine de celle de Molls et al. (1995), [89], mais toutes deux présentent des écarts parfois significatifs avec les relevés expérimentaux de Nawachukwu (1979), [91], utilisés par Molls et al. Cela permet d'insister sur l'importance du modèle de dissipation latérale et de la paramétrisation de la viscosité turbulente qui sont choisies pour représenter un type d'écoulement. De plus, l'étude 3D de cet écoulement montre que le modèle 2DH n'est valide qu'en aval de l'obstacle (Ouillon (1992), [99]).

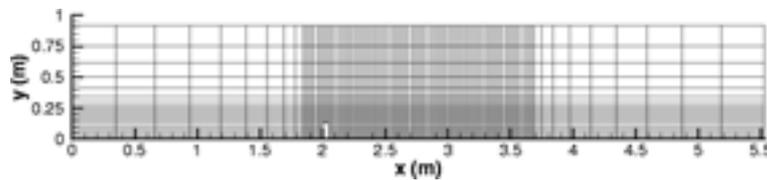


Figure 3.20 : Exemple de maillage irrégulier pour  $dx_{min} = 0.0228 m$ .

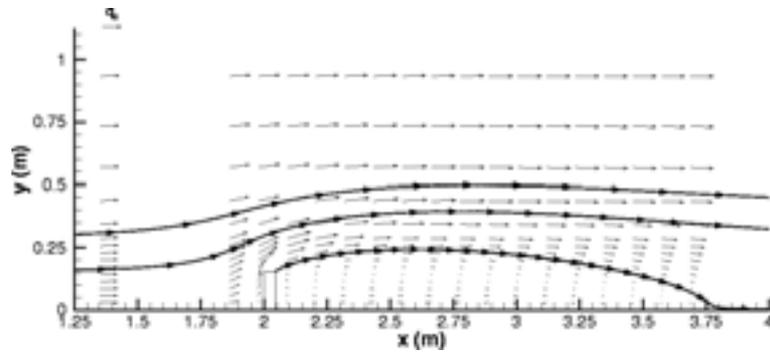


Figure 3.21 : Champs des vecteurs débit à  $t_s$  pour  $dx_{min} = 0.0057 m$  (représentation partielle 1 noeuds sur 20 en  $\vec{x}$  et 1 noeud sur 5 en  $\vec{y}$ ).

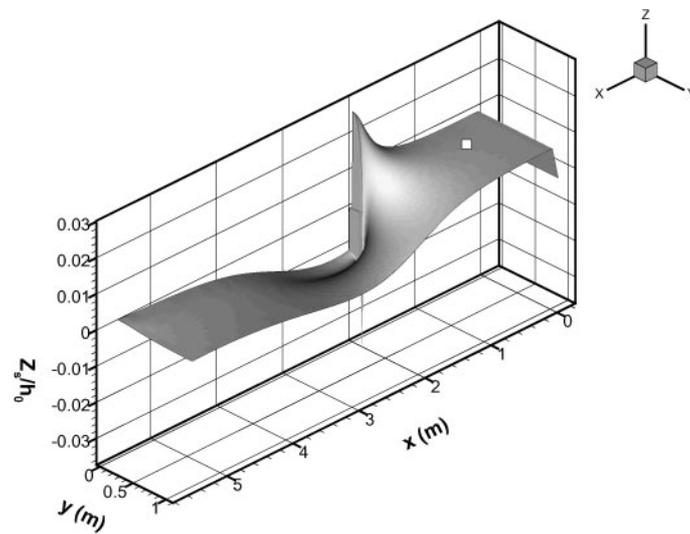


Figure 3.22 : Surface libre adimensionnée à  $t_s$  pour  $dx_{min} = 0.0114 m$ .

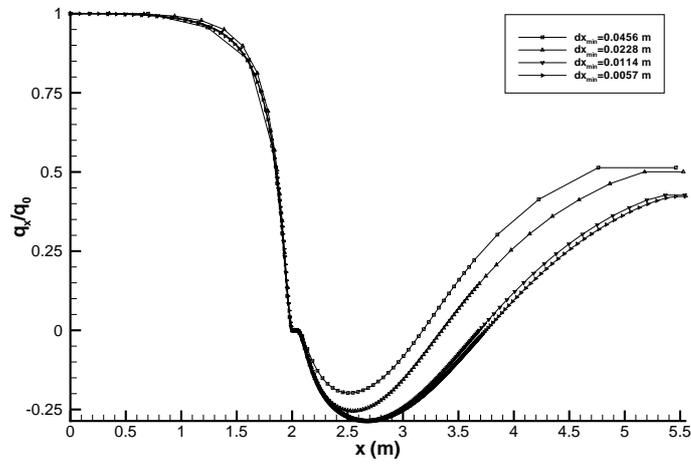


Figure 3.23 : Profil du débit adimensionné à  $t_s$  pour 4 maillages.

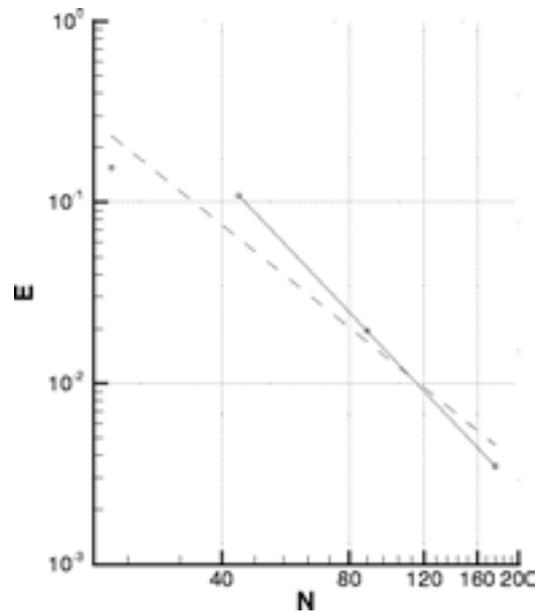


Figure 3.24 : Diagramme de convergence du schéma par l'extrapolation de Richardson sur les 3 maillages les plus fins; (—) Ordre global 1.8, (-) ordre local 2.4.

### Configuration type d'un écoulement sur une plage

Pour traiter l'hydrodynamique littorale, on définit un domaine de calcul limité par la ligne d'eau, le large et deux frontières perpendiculaires à la côte (figure 3.25).

La ligne d'eau est une zone très peu profonde difficile à gérer car la vitesse moyenne de l'écoulement est inversement proportionnelle à la hauteur d'eau. En pratique, on considère la ligne d'eau comme un mur et qu'une faible hauteur d'eau est toujours présente. Cette technique permet de reproduire l'élévation moyenne de la surface libre (*set-up*) sans prendre en compte sa présence sur le haut de plage (figure 3.26), et ce résultat est en adéquation avec les observations. L'application d'une condition d'adhérence ou de glissement sur la ligne d'eau n'affecte pas significativement l'écoulement, celui-ci n'est modifié que sur une ou deux mailles. Evidemment, si on souhaite s'intéresser prioritairement aux processus sur le haut de plage (zone de *swash*, progression de la marée), il devient nécessaire de mieux modéliser cette partie de la plage.

Au large, l'idéal est d'appliquer une condition limite ouverte, libre de toute influence. Cependant, les difficultés du traitement implicite de cette condition, pour l'obtention de la solution stationnaire du courant moyen, ont conduit à considérer la frontière au large comme un mur glissant dans la plupart des situations et comme un mur adhérent dans des cas particuliers. Loin de la zone de déferlement, on justifie ce traitement de la limite au large par le caractère faiblement énergétique de l'écoulement ou en le considérant parallèle à la limite.

Les conditions aux limites périodiques sont particulièrement bien adaptées pour les études de stabilité des longues plages de sable car elles permettent d'obtenir un domaine de calcul cyclique refermé sur lui-même. On peut ainsi étudier la génération de bancs de sable qui apparaissent régulièrement sur la plage. Les conditions aux limites périodiques permettent également de s'affranchir des conditions limites ouvertes sur les frontières perpendiculaires à la côte. Toutefois, elles contraignent les écoulements dans leur échelle spatiale périodique.

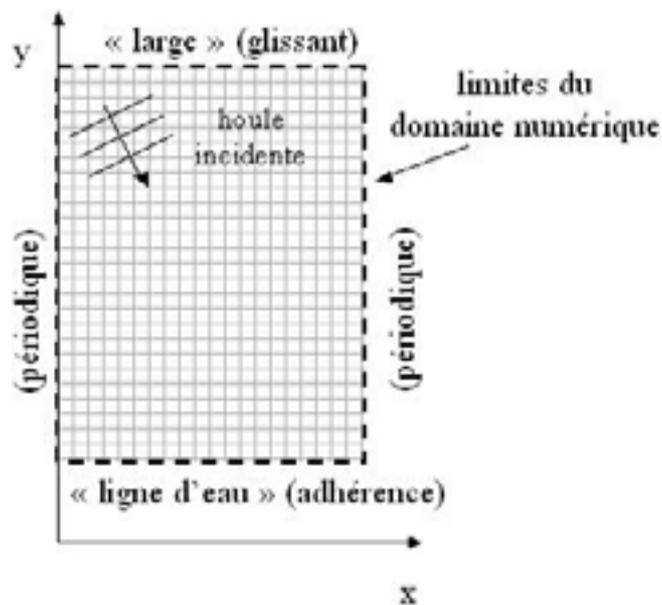


Figure 3.25 : Schéma du domaine numérique et des conditions limites de base associées pour l'étude d'une plage.

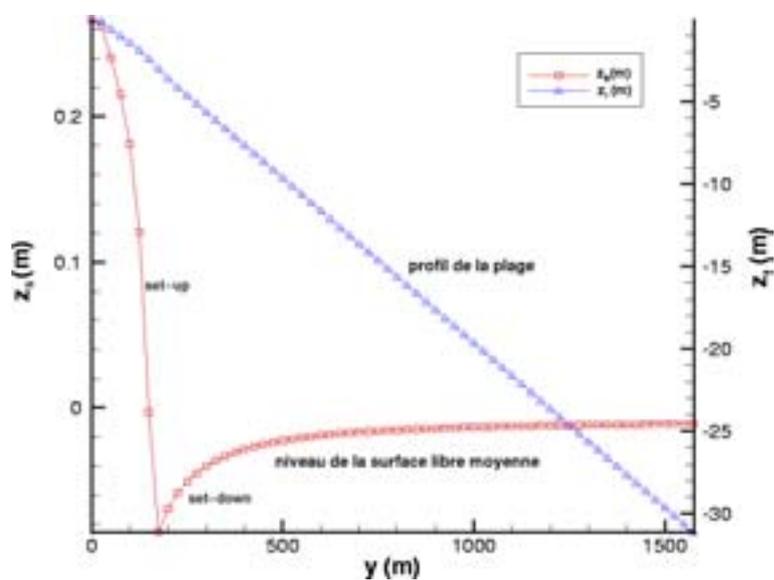


Figure 3.26 : Illustration du set-up sur une plage plane pour une houle frontale de 2 m avec une condition limite de type « mur » à la ligne d'eau.

Courant longitudinal sur une plage plane

Dans ce test, on considère la génération du courant longitudinal sur une plage plane par les effets d'une houle d'incidence oblique (figure 3.27).

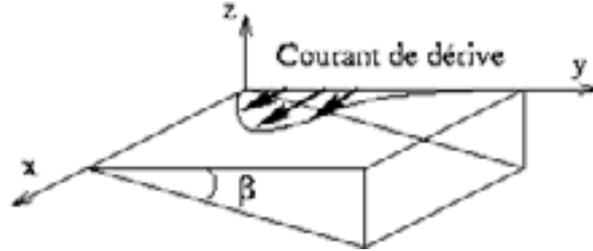


Figure 3.27 : Schéma du courant induit par la houle oblique sur une plage plane.

On souhaite vérifier le bon équilibre entre les forces motrices de l'écoulement et les forces résistantes. L'écoulement est représenté par la solution stationnaire des équations suivantes:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (h\vec{U}) = 0$$

$$\frac{\partial h\vec{U}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (h\vec{U} \otimes \vec{U}) + gh\vec{\nabla}(Z_s) + C_f \|\vec{U}\| \vec{U} = h\vec{F}$$

L'écoulement est forcé par des tensions de radiation uniformes sur toute la longueur de la plage avec une variation transversale typique d'une houle oblique. L'objectif est d'obtenir un courant de dérive de la forme:

$$\begin{aligned} U_0 &= ay \exp(-by) \\ V_0 &= 0 \\ h_0 &= h_{min} + \beta y \end{aligned} \tag{3.59}$$

Le terme moteur est alors donné par:

$$h\vec{F} = C_f \|\vec{U}_0\| \vec{U}_0$$

Initialement celui-ci permet de mettre le fluide en mouvement, et il doit finir par s'équilibrer avec les forces de friction sur le fond ( $h\vec{F} = C_f \|\vec{U}\| \vec{U}$ ).

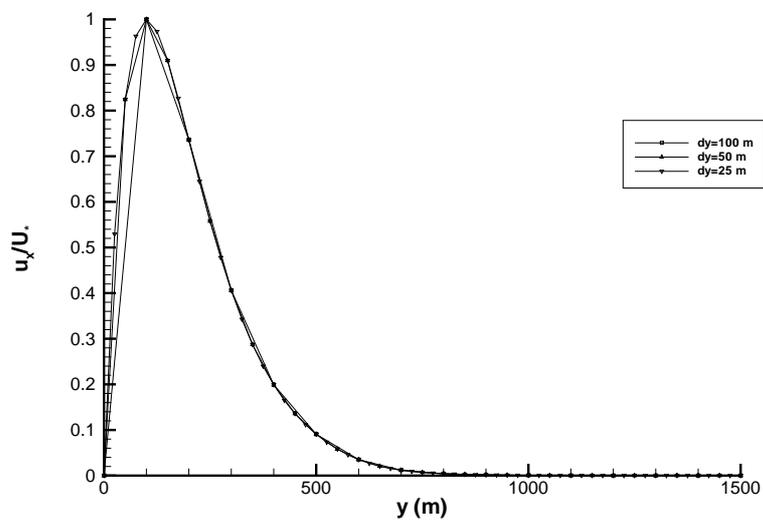
La vitesse maximum du courant est située en  $y_* = \frac{1}{b} = 100 \text{ m}$  et vaut  $U_* = \frac{a}{b \exp(1)} = 1 \text{ m/s}$ . La pente de la plage est fixée à  $\beta = 2\%$ . Avec ce jeu de valeurs, on en déduit que

le débit maximum est décalé par rapport à la vitesse maximum comme on l'observe dans la nature. Il se situe en  $y'_* = 197.53m$  et vaut  $Q_* = 3.017 m^2/s$ . Le frottement sur le fond est supposé uniforme de valeur  $C_f = 0.4\%$ , ce qui équivaut à un coefficient de Chézy de  $C = 49.5 m^{1/2}/s$ .

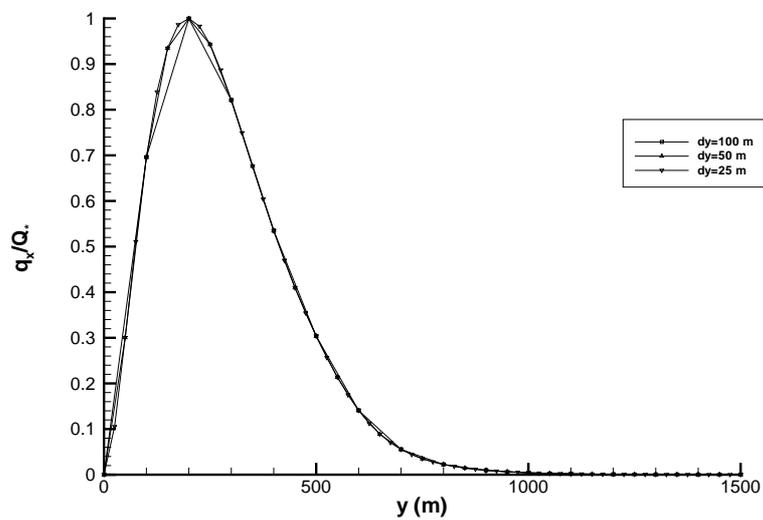
On résout le problème sur une plage plane périodique avec des conditions limites latérales de glissement au large et d'adhérence à la ligne d'eau. Pour éviter les problèmes à la ligne d'eau, la hauteur d'eau est faible mais non nulle ( $h_{min} = 0.1 m$ ).

Ici, les calculs ont été réalisés uniquement avec le schéma (Q:2,H:2,NL:2). Le courant obtenu se développe bien selon le profil de courant souhaité (3.59). Par rapport aux cas précédents, le calcul converge rapidement et même pour une  $CFL = 100$ . Cependant l'augmentation de la  $CFL$  limite la régularité de la convergence.

On constate sur les figures 3.28a et 3.28b que le profil du débit et celui de la vitesse sont semblables mais que les maxima sont décalés. Ce résultat est conforme à la solution analytique. On observe que l'équilibre entre les tensions de radiation et le frottement sur le fond est parfaitement réalisé sur chaque noeud (solution au noeud = solution exacte à la précision machine près).



(a) vitesse



(b) débit

Figure 3.28 : Profils transversaux adimensionnés pour plusieurs maillages.

### Canal rectiligne avec une dune sous-marine

Ce cas permet de vérifier qualitativement le comportement d'un écoulement uniforme sur une dune sous-marine en régime sous-critique. On souhaite principalement établir l'ordre de convergence du modèle en présence d'un relief sous-marin. Comme le fond est faiblement perturbé par la dune, on exploite le même modèle que le cas précédent avec la même technique pour générer l'écoulement. Cette fois, l'objectif est d'obtenir un écoulement uniforme avec:

$$\begin{aligned}U_0 &= 5 \text{ m/s} \\V_0 &= 0 \\h_0 &= 10 \text{ m}\end{aligned}$$

Au centre du canal  $(x_0, y_0)$ , la dune sous-marine sinusoidale tronquée (figure 3.29) est définie par:

$$Z_f(r) = -h_0 + \epsilon(1 + \cos(2\pi r/\lambda))/2$$

avec  $r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$ ,  $\epsilon = 0.1h_0$  et  $\lambda = 400 \text{ m}$ . Le coefficient de frottement sur le fond est supposé uniforme et basé sur un coefficient de Chézy de  $C = 73.7 \text{ m}^{1/2}/\text{s}$ . On résout le problème dans un canal périodique avec une condition de glissement sur les frontières latérales. On cherche la solution stationnaire de l'écoulement sur 4 maillages irréguliers avec le schéma (Q:2,H:2,NL:2) et une  $CFL = 15$ .

On constate sur la figure 3.30b que le courant est plus fort au sommet de la dune et plus faible en amont et en aval. Par contre la figure 3.30a montre que le débit est plus important sur les côtés de la dune avec un minimum au sommet de la dune. La surface libre représentée sur la figure 3.31 est déformée et on retrouve bien le comportement de l'écoulement linéaire 2D prédit par Baines (1995), [9], et illustré sur la figure 3.32a. Il apparaît une dépression au-dessus de la dune et deux bosses en amont et en aval de la dune. Le creux dans la surface libre est typiquement observé pour des écoulement 1D en régime sous critique (§ 3.4.1). Ici, les deux élévations supplémentaires sont issues des interactions 2D.

On a représenté sur la figure 3.33 l'erreur sur le débit normalisé obtenu au niveau du centre de la dune en fonction du nombre de noeuds équivalent du maillage. La solution de référence est calculée par la technique de Richardson sur les trois maillages les plus fins, on trouve que le débit converge vers  $Q/Q_0 \approx 0.942 \text{ m}$  ( $Q_0 = U_0 h_0$ ). On constate que

la convergence de la méthode n'est pas régulière pour des maillages grossiers. L'ordre de convergence se stabilise ensuite pour les maillages plus fins et est estimé à 2.

Remarques: (i) ce cas correspond à celui utilisé par De vriend (1987), [33], pour analyser la morphodynamique d'une dune sous-marine dans un courant uniforme. La répartition des débits obtenue ici associée au modèle des ondes de sables permet d'expliquer la déformation en étoile de la dune (voir chapitre 2). (ii) la déformation de la surface libre, au dessus de la dune circulaire, montre que l'on retrouve bien le comportement de l'écoulement linéaire 2D prédit par Baines (1995), [9], pour un écoulement transversal à une dune profilée (base elliptique). Cependant, on a essayé plusieurs configurations de dunes profilées, et le même comportement de la surface libre est obtenu quelle que soit l'orientation de la dune dans le courant. Ces observations vont à l'encontre du résultat de Baines qui prédit que la surface doit s'élever au-dessus de la dune pour un écoulement longitudinal à une dune profilée (figure 3.32b).

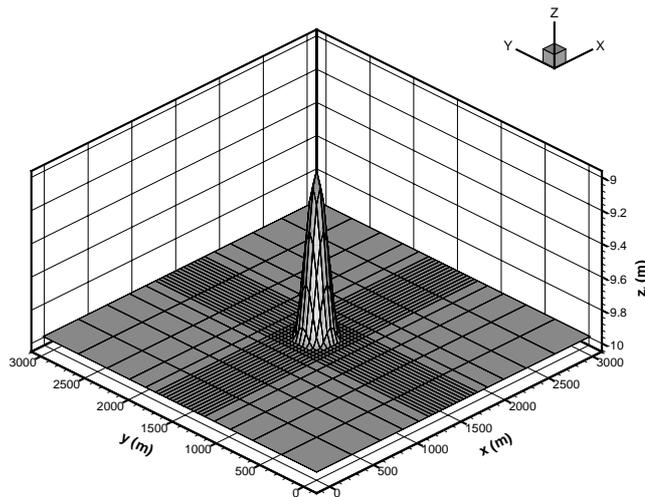


Figure 3.29 : Forme du fond pour  $dx_{min} = 40 m$ .

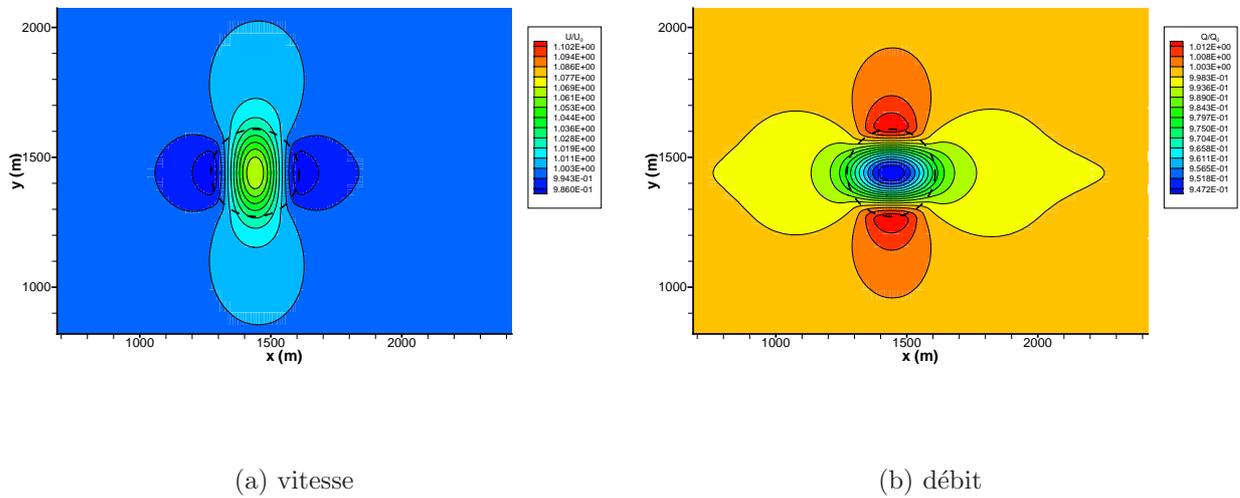


Figure 3.30 : Isovaleurs adimensionnées pour  $dx_{min} = 10$  m; (— — —) contour de la dune.

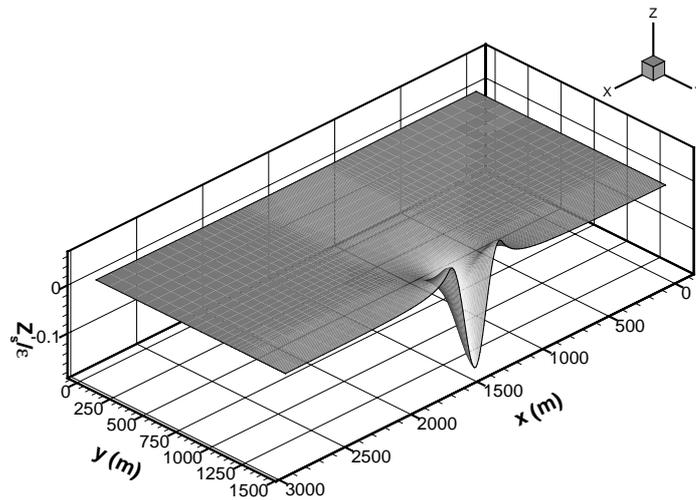
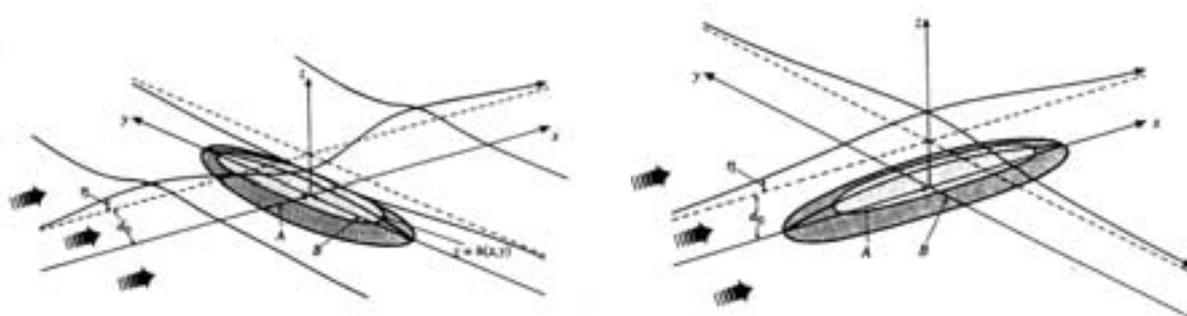


Figure 3.31 : Surface libre adimensionnée pour  $dx_{min} = 10$  m; représentation d'un demi domaine de calcul.



(a)  $B > A$

(b)  $A > B$

Figure 3.32 : Solution stationnaire de la surface libre pour un écoulement sous-critique sur un obstacle profilé; selon Baines (1995), [9]

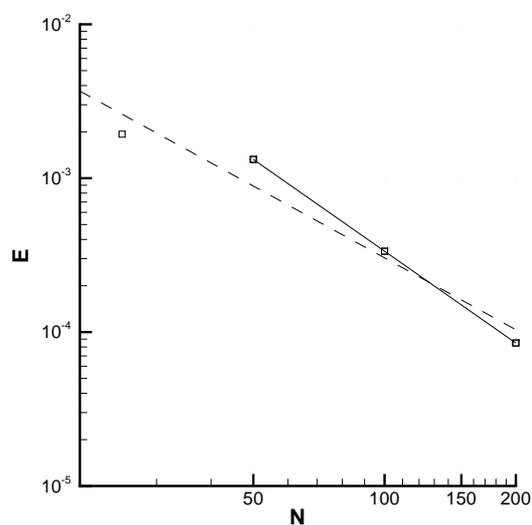


Figure 3.33 : Diagramme de convergence du schéma par l'extrapolation de Richardson sur les 3 maillages les plus fins; (—) Ordre global 1.6, (-) ordre local 2.

### 3.4.3 Performance du modèle numérique

On rappelle que la méthode numérique a été développée pour obtenir des solutions quasi-stationnaires du modèle de courant moyen induit par la houle.

Cependant, on a pu constater que la méthode implicite permet quand même de choisir une  $CFL < 1$  pour résoudre les problèmes instationnaires. L'ordre de la méthode est alors déterminé à un instant donné, il prend en compte la combinaison des erreurs de troncature dues à la discrétisation temporelle et spatiale. Les ordres de convergence obtenus sont très variables et s'étendent de 1 à 4. L'ordre de convergence assez élevé permet d'atténuer rapidement (en raffinant le maillage) les oscillations de la solution numérique dues à la nature dispersive du schéma.

En fait, pour les problèmes stationnaires, on utilise une  $CFL \approx 10$ , car c'est un bon compromis entre le nombre d'itérations temporelles, le taux de convergence stationnaire et la mémoire utilisée pour résoudre le système linéaire. Il est important de noter que dans la majorité des cas, l'ordre de la méthode est plus faible pour des maillages grossiers. Il est nécessaire d'augmenter le nombre de noeuds pour obtenir un ordre de convergence stabilisé. Les validations précédentes permettent alors d'affirmer que la méthode converge à l'ordre 2 en espace.

## 3.5 Conclusion

On a développé un modèle numérique à l'ordre 2 adapté à la résolution des courants moyens stationnaires. La plupart des modèles numériques actuels sont basés sur les méthodes ADI et traitent la hauteur d'eau comme une variable indépendante. Le couplage numérique débit-hauteur d'eau permet de résoudre le modèle d'une manière plus économique qu'une résolution implicite sur les variables  $Q_x, Q_y, h$  traitées indépendamment.

Ce modèle implicite en volumes finis sur un maillage non-colocatif conduit à la résolution d'un grand système linéaire creux. Celui-ci est préconditionné par la méthode ILUD et résolu par la méthode du BiCGSTAB. L'optimisation de la  $CFL (> 10)$  fait l'objet d'un recalage au cas par cas. On cherche à réduire le nombre d'itérations dans le solveur en maintenant la qualité du résidu tout en limitant le nombre d'itérations temporelles pour atteindre la solution stationnaire.



# Chapitre 4

## Résolution numérique de la loi de conservation du sédiment

### 4.1 Introduction

Dans le chapitre 2, on a vu que la loi de conservation du sédiment (2.2) rentre dans le cadre plus général des lois de conservation hyperboliques car le modèle des ondes de sable (2.23) met en évidence le caractère propagatif des corps sédimentaires. De plus, les non-linéarités du modèle morphodynamique introduisent des changements de forme et des raidissements locaux de la bathymétrie. Au voisinage de telles irrégularités de la solution (chocs, discontinuités), des hautes fréquences apparaissent naturellement dans la solution et la dispersion numérique de certaines méthodes les fait propager à une vitesse différente de la vitesse réelle de la solution. De ce fait, la solution numérique peut osciller.

L'objectif de cette partie est de proposer des méthodes numériques pour résoudre la loi de conservation du sédiment et de s'assurer que la solution est bien représentative du problème morphodynamique. Toutefois, il est important de souligner que les méthodes (robustes) décrites dans ce chapitre pour résoudre la loi de conservation du sédiment ne sont pas nécessaires dans le cas où les phénomènes d'advection sont négligeables devant les autres. Une "simple" méthode centrée s'avère alors amplement suffisante pour bien

résoudre l'évolution du fond.

Pour remédier aux oscillations numériques parasites, il suffit d'augmenter la diffusion dans le modèle; soit en l'introduisant par la modélisation des processus physiques, soit par des techniques numériques. L'intensité de la "diffusion physique" peut être insuffisante. L'intérêt des méthodes numériques à limiteur de pente (ou à limiteur de flux) est alors de rendre la solution quasiment monotone en agissant localement sur la diffusion numérique du schéma et seulement lorsque cela est nécessaire.

Le transport gravitaire permet d'ajouter de la diffusion, mais son introduction est souvent justifiée comme un moyen de contourner les difficultés numériques. La figure (4.1) illustre l'évolution d'une dune soumise à l'action d'un courant unidirectionnel, en absence d'effet de transport gravitaire. On peut constater que la méthode d'ordre 1 (upwind) diffuse, que le schéma d'ordre deux (Lax-Wendroff) oscille et qu'une pondération entre les deux méthodes (Lax-Wendroff TVD) permet de résoudre le problème sans transport gravitaire correctement. A partir de cette dernière méthode, il est alors possible de prendre en compte le transport gravitaire indépendamment des difficultés numériques.

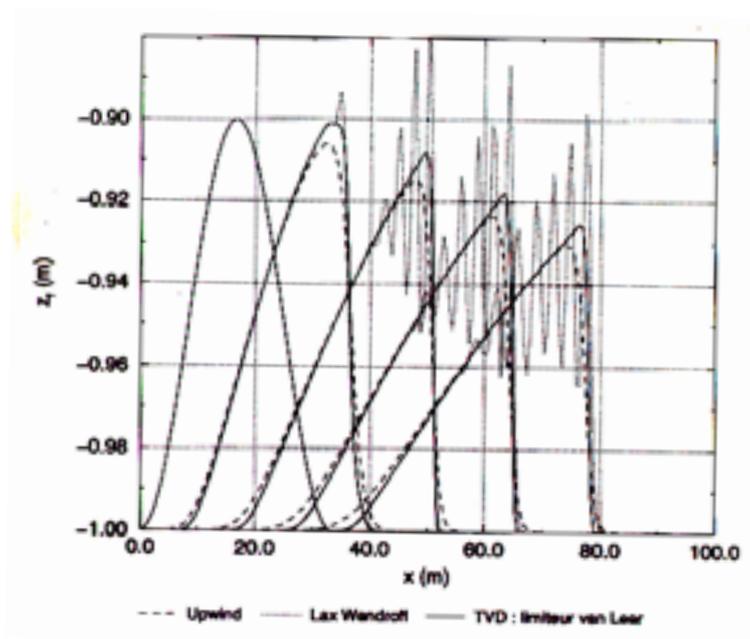


Figure 4.1 : Propagation d'une dune de sable avec différentes méthodes numériques.

Dans un premier temps, on s'intéresse à la transformation de la loi de conservation du sédiment vers l'équation des ondes de sable en insistant sur l'importance de la vitesse

caractéristique du problème pour bien identifier les termes convectifs des autres termes. Ensuite, on distingue les schémas numériques qui permettent de résoudre les équations de transport à partir de la vitesse caractéristique et les méthodes numériques qui permettent de résoudre directement la loi de conservation hyperbolique sans recourir à une estimation de cette vitesse. Enfin, on compare ces méthodes sur des cas de validation particulièrement raides et on présente les applications à la morphodynamique sédimentaire.

## 4.2 Deux approches pour résoudre la loi de conservation du sédiment

Dans le chapitre 3, on a choisi une méthode implicite pour déterminer une solution quasi-stationnaire des courants moyens. Ici, on cherche à décrire l'évolution du fond au cours du temps, donc on préfère s'orienter vers des méthodes explicites. La condition *CFL* doit être respectée ( $< 1$ ) pour représenter les régimes transitoires et le choix d'une méthode explicite permet d'éviter les difficultés dues à la résolution d'un grand système linéaire creux.

Dans cette partie, on présente différentes méthodes numériques d'ordre supérieur et non oscillantes pour résoudre les problèmes hyperboliques comme l'équation des ondes de sable, ou la loi de conservation du sédiment globale:

$$\frac{\partial Z_f}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{F} = 0 \quad \text{avec} \quad \vec{F} = \frac{1}{1-p} \vec{Q}_t \quad (4.1)$$

D'abord, on propose trois méthodes de résolution numérique TVD à limiteur de flux. Les deux premières sont obtenues par différences finies et basées sur une discrétisation décentrée d'ordre 2 (UPW2TVD) et centrée (LWTVD). La troisième est basée sur l'intégration de la méthode des caractéristiques par volume finis (MCTVD). Les méthodes qui ne font intervenir que la vitesse caractéristique ne s'appliquent qu'à la partie advective (\*) du modèle des ondes de sable:

$$\underbrace{\frac{\partial Z_f}{\partial t} + \vec{C}_{Z_f} \cdot \vec{\nabla}(Z_f)}_* + D_{Z_f} = 0 \quad (4.2)$$

Par conséquent, les autres termes ( $D_{Z_f}$ ) sont traités avec une simple discrétisation centrée.

La vitesse caractéristique de propagation des ondes de sable est définie par:

$$\vec{C}_{Z_f} = \frac{\partial \vec{F}}{\partial Z_f}$$

Lorsque les termes convectifs sont prépondérants dans une équation d'advection-diffusion, ils font l'objet d'un traitement particulier visant à limiter les phénomènes de dispersion numérique. Ignorer la bonne vitesse caractéristique revient potentiellement à masquer des termes d'advection dans les autres termes. La résolution numérique de l'équation de transport non-linéaire s'en trouve faussée. Basées sur une mauvaise vitesse d'avection les méthodes de type Lax-Wendroff TVD ne sont plus efficaces car elles ne corrigent pas de façon optimale le flux numérique. Malgré les difficultés posées par l'obtention de la vitesse caractéristique, Dhatt et al. (1994), [43], ce sont ces méthodes que l'on retrouve couramment employées.

En général, l'expression du flux de sédiment ne permet pas de connaître directement l'intensité du transport sédimentaire en fonction de la forme du fond, par conséquent, on n'est pas toujours en mesure de calculer la vitesse caractéristique  $\vec{C}_{Z_f}$ . Dans ce cas, on peut exploiter la méthode centrale non-oscillante (NOCS), pour laquelle la vitesse caractéristique n'est pas nécessaire. Cette méthode numérique en volume finis est basée sur la reconstruction affine par morceaux de la solution et des flux. Elle est très peu répandue dans le domaine de la morphodynamique sédimentaire, pourtant elle permet de traiter directement l'équation de conservation du sédiment (4.1). L'inconvénient est qu'elle présente un caractère diffusif difficile à contrôler.

### **4.2.1 Schéma TVD pour traiter les équations de transport advectif**

Dans cette partie, on développe les discrétisations numériques 1D que l'on a testées pour résoudre l'équation de transport advectif (4.2). D'abord, on présente les propriétés fondamentales que doivent vérifier les schémas numériques pour être conservatifs et non-oscillants (TVD). Ensuite, on décrit différents schémas de bases (décentrés puis centrés) que l'on corrige pour qu'ils vérifient les propriétés TVD. Enfin, on précise le moyen d'étendre ces méthodes en 2D, et en particulier, on donne la discrétisation complète du schéma de Lax-Wendroff TVD que l'on a choisi pour les applications morphodynamiques.

Propriétés à vérifier

On considère la loi de conservation scalaire 1D:

$$\frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \tag{4.3}$$

où  $f(z)$  représente le flux physique. On définit  $z_i^n$  comme la solution numérique de (4.3) à  $x = i\Delta x$  et  $t = n\Delta t$ , avec  $\Delta x$  le pas d'espace du maillage et  $\Delta t$  le pas de temps. Pour respecter les propriétés de conservation, le schéma numérique associé à (4.3) s'écrit sous la forme:

$$z_i^{n+1} = z_i^n - \lambda \left( f_{i+\frac{1}{2}}^* - f_{i-\frac{1}{2}}^* \right) \tag{4.4}$$

où  $\lambda = \frac{\Delta t}{\Delta x}$  et  $f_{i+\frac{1}{2}}^*$  est communément appelé flux numérique à l'interface  $i + \frac{1}{2}$ . Le flux numérique discrétisé sur  $n$  points ( $f_{i\pm\frac{1}{2}}^* = f(z_{i\mp 1}^n, z_i^n, z_{i\pm 1}^n, z_{i\pm 2}^n)$ ) est consistant avec la loi de conservation (4.3) s'il vérifie:

$$f^*(z, z, z, z) = f(z).$$

Le schéma numérique (4.4) vérifie la propriété de variation totale décroissante (TVD) si la monotonicité de la solution est préservée au cours du temps. Connaissant la solution initiale du problème (4.3), le schéma numérique est dit TVD s'il vérifie la propriété:

$$TV(z^n) \leq TV(z^{n+1}) \quad \text{où} \quad TV(z^n) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \left| \delta_{i+\frac{1}{2}} z^n \right|$$

avec la convention générale pour toutes les fonctions discrètes  $w$ :

$$\delta_{i+\frac{1}{2}} w = w_{i+1} - w_i$$

Alors, si on réécrit le schéma (4.4) sous la forme:

$$z_i^{n+1} = z_i^n - \lambda \left( C_{i+\frac{1}{2}}^- \delta_{i+\frac{1}{2}} z^n + C_{i-\frac{1}{2}}^+ \delta_{i-\frac{1}{2}} z^n \right) \tag{4.5}$$

le schéma (4.5) est TVD sous les conditions

$$\begin{cases} C_{i+\frac{1}{2}}^- \leq 0 \\ C_{i-\frac{1}{2}}^+ \geq 0 \\ \lambda \left( C_{i+\frac{1}{2}}^+ - C_{i+\frac{1}{2}}^- \right) \leq 1 \end{cases} \quad \text{pour tout } i. \tag{4.6}$$

Bien qu'un schéma linéaire TVD soit d'ordre 1, cette restriction ne s'applique pas aux schémas non-linéaires qui peuvent être rendus TVD à un ordre supérieur (Hirsch (1990) [63]).

### Schéma décentré du 1er ordre

#### a. forme caractéristique

A l'origine, le schéma upwind est basé sur la forme caractéristique d'une équation de transport linéaire telle que:

$$\frac{\partial z}{\partial t} + a \frac{\partial z}{\partial x} = 0, \quad (4.7)$$

et sa discrétisation dépend du signe de la vitesse caractéristique  $a$ ; pour  $a > 0$  (resp.  $a < 0$ ), on discrétise le gradient de la solution par une différence amont (resp. avale).

Si on suppose que le flux physique est linéaire ( $f(z) = az$ ), le flux numérique s'écrit

$$f_{i+\frac{1}{2}}^{*(1)} = \frac{1}{2} (f_i^n + f_{i+1}^n) - \frac{1}{2} \text{sign}(a) (f_{i+1}^n - f_i^n)$$

Pour étendre ce schéma à un problème non linéaire, il suffit de définir une vitesse caractéristique locale (Yee (1987), [150]):

$$a_{i+\frac{1}{2}} = \begin{cases} \frac{\delta_{i+\frac{1}{2}} f}{\delta_{i+\frac{1}{2}} z} & \text{si } \delta_{i+\frac{1}{2}} z \neq 0 \\ \frac{\partial f}{\partial z} \Big|_{i+\frac{1}{2}} & \text{sinon} \end{cases} \quad (4.8)$$

Le flux numérique upwind d'ordre 1 (UPW1) pour le problème scalaire non linéaire (4.3) s'écrit alors:

$$f_{i+\frac{1}{2}}^{UPW1} = f_{i+\frac{1}{2}}^{*(1)} = \frac{1}{2} (f_i^n + f_{i+1}^n) - \frac{1}{2} \text{sign}(a_{i+\frac{1}{2}}) (f_{i+1}^n - f_i^n) \quad (4.9)$$

Le bilan des flux numériques pour le schéma conservatif (4.4) associé à l'écriture générale (4.5) et la définition de la vitesse caractéristique (4.8) permettent de déduire:

$$C_{i+\frac{1}{2}}^- = a_{i+\frac{1}{2}} \left( \frac{1 + \text{sign}(a_{i+\frac{1}{2}})}{2} \right)$$

$$C_{i+\frac{1}{2}}^+ = a_{i+\frac{1}{2}} \left( \frac{1 - \text{sign}(a_{i+\frac{1}{2}})}{2} \right)$$

On montre ainsi que le schéma UPW1 est d'ordre 1 en espace et en temps, et qu'il vérifie les propriétés TVD sous le critère  $CFL_{TVD}$  (4.6):

$$\lambda \left| a_{i+\frac{1}{2}} \right| \leq 1.$$

### b. décomposition des flux

Après la forme caractéristique, on présente l'approche par décomposition du flux (*flux splitting*). Sa dépendance directe avec le signe de la vitesse caractéristique a été introduite par Steger et Warming (1981), [125]. Cette approche est une alternative à la forme caractéristique, pratique pour écrire les discrétisations.

D'une manière générale, on peut décomposer le flux physique en la somme de deux contributions, l'une positive et l'autre négative:

$$f_i = f_i^+ + f_i^- \quad (4.10)$$

Cette décomposition permet d'évaluer le flux à l'interface en faisant le bilan des contributions positives et négatives de flux qui traversent cette interface. Si on considère les contributions comme constantes par maille, on obtient une définition équivalente de (4.9) du flux numérique au 1er ordre:

$$f_{i+\frac{1}{2}}^{*(1)} = f_i^+ + f_{i+1}^- \quad (4.11)$$

### Schéma décentré d'ordre supérieur

On peut obtenir un schéma décentré d'ordre 2 en espace en introduisant plus de points dans la discrétisation. L'approche MUSCL (Monotone Upstream-centred Schemes for Conservation Laws) permet de générer des schémas upwind d'ordre 2 par extrapolation de la variable sur les interfaces. Cependant, lorsque le flux ne dépend pas explicitement de la variable, on doit recourir à une interpolation du flux lui-même sur les interfaces. On peut noter que ces deux méthodes ne sont pas exactement identiques lorsque le flux est non linéaire (Hirsch (1990), [63]).

#### a. schéma upwind d'ordre 2

En se basant sur l'approche par décomposition du flux, on peut extrapoler les contributions du flux à l'interface. Une extrapolation amont (resp. aval) d'ordre 2 est utilisée pour le flux positif (resp. négatif)

$$\begin{aligned} f_{i+\frac{1}{2}}^{+(2)} &= f_i^+ + \frac{1}{2} (f_i^+ - f_{i-1}^+), \\ f_{i+\frac{1}{2}}^{-(2)} &= f_{i+1}^- - \frac{1}{2} (f_{i+2}^- - f_{i+1}^-). \end{aligned}$$

On en déduit le flux numérique à l'ordre 2 (UPW2):

$$f_{i+\frac{1}{2}}^{*(2)} = f_{i+\frac{1}{2}}^{+(2)} + f_{i+\frac{1}{2}}^{-(2)}$$

à l'aide de la définition du flux physique (4.10) et du flux numérique au 1er ordre (4.11), on obtient:

$$\begin{aligned} \delta_{i-\frac{1}{2}} f^+ &= f_i^+ - f_{i-1}^+ = f_i - f_{i-\frac{1}{2}}^{*(1)} \\ \delta_{i+\frac{1}{2}} f^- &= f_{i+1}^- - f_i^- = f_{i+\frac{1}{2}}^{*(1)} - f_i \end{aligned}$$

ce qui permet de réécrire le flux upwind à l'ordre 2 en espace (UPW2):

$$f_{i+\frac{1}{2}}^{UPW2} = f_{i+\frac{1}{2}}^{*(2)} = f_{i+\frac{1}{2}}^{*(1)} + \frac{1}{2} \left( f_i - f_{i-\frac{1}{2}}^{*(1)} \right) + \frac{1}{2} \left( f_{i+1} - f_{i+\frac{3}{2}}^{*(1)} \right) \quad (4.12)$$

A partir des relations (4.4), (4.5) et (4.8), on en déduit:

$$C_{i-\frac{1}{2}}^+ = \left( \underbrace{1}_{p1} + \underbrace{\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \frac{1}{r_{i-\frac{3}{2}}^+}}_{p2} \right) a_{i-\frac{1}{2}}^+ \quad (4.13)$$

$$C_{i+\frac{1}{2}}^- = \left( \underbrace{1}_{p1} + \underbrace{\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \frac{1}{r_{i+\frac{3}{2}}^-}}_{p2} \right) a_{i+\frac{1}{2}}^-, \quad (4.14)$$

où les fonctions qui informent sur la régularité du flux sont définies par:

$$r_{i-\frac{1}{2}}^+ = \frac{\delta_{i+\frac{1}{2}} f^+}{\delta_{i-\frac{1}{2}} f^+} \quad \text{et} \quad r_{i+\frac{1}{2}}^- = \frac{\delta_{i-\frac{1}{2}} f^-}{\delta_{i+\frac{1}{2}} f^-}. \quad (4.15)$$

La partie (p1) correspond à la discrétisation upwind d'ordre 1, tandis que la partie (p2) correspond à l'extension du schéma au 2nd ordre.

Par définition, on a  $a^+ \geq 0$  et  $a^- \leq 0$ , cependant les deux premières conditions TVD (4.6) ne peuvent pas être vérifiées car les fonctions  $r^+$  et  $r^-$  ne sont pas bornées a priori. Le schéma UPW2 n'est donc pas TVD et peut introduire des oscillations numériques parasites dans les zones irrégulières.

**b. schéma upwind d'ordre 2 TVD**

La décomposition de flux opérée pour obtenir UPW2 n'est pas suffisante pour prévenir l'apparition des oscillations au voisinage des chocs ou des transitions abruptes dans ce schéma d'ordre 2. Pour éviter ces désagréments et obtenir des transitions raides et monotones près des chocs, il est nécessaire d'introduire une limitation non-linéaire du flux numérique par l'intermédiaire d'une fonction de pondération appelée aussi limiteur.

Sachant que le schéma UPW1 est déjà TVD, on choisit de ne pondérer que localement les termes (p2), en fonction de la régularité du flux. Les relations (4.13) et (4.14) pondérées s'écrivent alors:

$$C_{i-\frac{1}{2}}^+ = \left( \underbrace{1}_{p1} + \underbrace{\frac{1}{2}\Psi_{i-\frac{1}{2}}^+ - \frac{1}{2}\frac{\Psi_{i-\frac{3}{2}}^+}{r_{i-\frac{3}{2}}^+}}_{p2} \right) a_{i-\frac{1}{2}}^+ \tag{4.16}$$

$$C_{i+\frac{1}{2}}^- = \left( \underbrace{1}_{p1} + \underbrace{\frac{1}{2}\Psi_{i+\frac{1}{2}}^- - \frac{1}{2}\frac{\Psi_{i+\frac{3}{2}}^-}{r_{i+\frac{3}{2}}^-}}_{p2} \right) a_{i+\frac{1}{2}}^- \tag{4.17}$$

où la fonction de pondération  $\Psi$  est appliquée aux indicateurs de la régularité de la solution  $r$ :

$$\Psi_{i-\frac{1}{2}}^+ = \Psi(r_{i-\frac{1}{2}}^+) \quad \text{et} \quad \Psi_{i+\frac{1}{2}}^- = \Psi(r_{i+\frac{1}{2}}^-)$$

Ainsi, pour assurer les 2 premières propriétés TVD, le limiteur doit vérifier une même condition:

$$1 + \frac{1}{2}\Psi(s) - \frac{1}{2}\frac{\Psi(r)}{r} \geq 0, \quad \forall r, s. \tag{4.18}$$

tandis que la troisième condition TVD, relative à la  $CFL_{TVD}$  du schéma, conduit aux conditions suffisantes proposées par Sweby (1984), [130]:

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\Psi(r)}{r} - \Psi(s) \right| \leq \Phi \quad \forall r, s \\ \lambda(a^+ - a^-) & \leq \frac{1}{1 + \Phi/2} = CFL_{TVD} \quad \text{avec } \Phi = \max(\Psi(r)) \quad \forall r \end{aligned} \tag{4.19}$$

Le schéma UPW2 rendu TVD par l'utilisation de limiteur s'écrit alors:

$$f_{i+\frac{1}{2}}^{UPW2TVD} = f_{i+\frac{1}{2}}^{*(1)} + \frac{1}{2}\Psi_{i-\frac{1}{2}}^+ \left( f_i - f_{i-\frac{1}{2}}^{*(1)} \right) + \frac{1}{2}\Psi_{i+\frac{3}{2}}^- \left( f_{i+1} - f_{i+\frac{3}{2}}^{*(1)} \right). \tag{4.20}$$

## Schéma centré d'ordre supérieur en temps et en espace

### a. schéma de Lax-Wendroff

Tous les schémas centrés explicites du second ordre sont dérivés du schéma de base de Lax-Wendroff [63]. L'idée de ce schéma consiste à estimer la solution numérique de chaque niveau temporel par un développement limité à l'ordre 2 en temps:

$$z_i^{n+1} = z_i^n + \Delta t \frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + o(\Delta t^3), \quad (4.21)$$

Ensuite, toutes les dérivées temporelles de la solution sont remplacées en fonction des dérivées spatiales du flux et de sa vitesse caractéristique pour respecter la loi de conservation (4.3). Avec  $f = az$ , on a:

$$\frac{\partial z}{\partial t} = -\frac{\partial f}{\partial x} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial t} = a \frac{\partial z}{\partial t}$$

La relation (4.21) devient:

$$z_i^{n+1} = z_i^n - \Delta t \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left( a \frac{\partial f}{\partial x} \right) + o(\Delta t^3)$$

Enfin, une discrétisation centrée du 2nd ordre est utilisée pour exprimer la variation spatiale des flux. Ceci conduit à la version non-linéaire à un pas du schéma de Lax-Wendroff:

$$z_i^{n+1} = z_i^n - \frac{1}{2} \lambda (f_{i+1}^n - f_{i-1}^n) + \frac{1}{2} \lambda^2 [a_{i+\frac{1}{2}}^n (f_{i+1}^n - f_i^n) - a_{i-\frac{1}{2}}^n (f_i^n - f_{i-1}^n)].$$

Le flux numérique de ce schéma centré du second ordre en espace et en temps est donné par:

$$f_{i+\frac{1}{2}}^{LW} = f_{i+\frac{1}{2}}^{*(2)} = \frac{1}{2} (f_i + f_{i+1}) - \frac{1}{2} \lambda a_{i+\frac{1}{2}} (f_{i+1} - f_i) \quad (4.22)$$

Malgré sa bonne précision dans les zones régulières, ce schéma centré explicite oscille et n'est pas du tout satisfaisant au voisinage des discontinuités ou des forts gradients de la solution. Pour être sûr du bon comportement de la méthode, on doit le rendre TVD en limitant les flux numériques, comme dans le cas du schéma upwind d'ordre 2.

### b. schéma de Lax-Wendroff TVD

Dans un premier temps, on reformule le flux numérique (4.22) en un flux du premier ordre (p1) plus une correction (p2) qui étend le flux au second ordre. Pour cela, on emploie

la méthode de décomposition du flux (4.10) et on exploite les propriétés  $a = a^+ + a^-$  et  $a^+ \cdot a^- = 0$  (Hirsch (1990), [63]). Le flux numérique se réécrit sous la forme:

$$f_{i+\frac{1}{2}}^{LW} = \underbrace{f_i^+ + f_{i+1}^-}_{p1} + \underbrace{\frac{1}{2}(1 - \lambda a_{i+\frac{1}{2}}^+) \delta_{i+\frac{1}{2}} f^+ - \frac{1}{2}(1 + \lambda a_{i+\frac{1}{2}}^-) \delta_{i+\frac{1}{2}} f^-}_{p2} \quad (4.23)$$

Ensuite pour rendre le schéma (4.23) TVD, on limite localement les flux “correctifs” (p2) en fonction des mêmes limiteurs  $\Psi$  que pour le schéma UPW2TVD. Le schéma de Lax-Wendroff rendu TVD par l’utilisation de limiteur de flux s’écrit alors:

$$f_{i+\frac{1}{2}}^{LWTV D} = f_i^+ + f_{i+1}^- + \frac{1}{2} \Psi(p_{i+\frac{1}{2}}^+) (1 - \lambda a_{i+\frac{1}{2}}^+) \delta_{i+\frac{1}{2}} f^+ - \frac{1}{2} \Psi(p_{i+\frac{1}{2}}^-) (1 + \lambda a_{i+\frac{1}{2}}^-) \delta_{i+\frac{1}{2}} f^-$$

où les fonctions relatives à la régularité de la solution sont redéfinies par:

$$p_{i+\frac{1}{2}}^+ = \frac{(1 - \lambda a_{i-\frac{1}{2}}^+) \delta_{i-\frac{1}{2}} f^+}{(1 - \lambda a_{i+\frac{1}{2}}^+) \delta_{i+\frac{1}{2}} f^+}, \quad p_{i+\frac{1}{2}}^- = \frac{(1 + \lambda a_{i+\frac{3}{2}}^-) \delta_{i+\frac{3}{2}} f^-}{(1 + \lambda a_{i+\frac{1}{2}}^-) \delta_{i+\frac{1}{2}} f^-}.$$

### Schémas basés sur la méthode des caractéristiques

Après les méthodes d’interpolations utilisées pour augmenter l’ordre des schémas décentrés upwind et les développements limités introduits par la méthode centrée de Lax-Wendroff, on présente la méthode des caractéristiques pour résoudre les problèmes d’advection.

#### a. intégration par différences finies

On part d’une solution linéaire par morceaux  $\hat{z}(x, t)$  reconstruite à partir de la solution initialement constante par maille  $z_i$  et de la pente  $\hat{z}_i$ :

$$\hat{z}(x, t) = z_i + \hat{z}_i \left( \frac{x - x_i}{\Delta x} \right) \quad \forall x \in I_i = \{x \mid |x - x_i| \leq \frac{1}{2} \Delta x\} \quad (4.24)$$

La résolution de la loi de conservation (4.3) se ramène à la résolution de la loi de conservation modifiée sur l’intervalle de temps  $T^{n+\frac{1}{2}} = \{t \mid |t - t^{n+\frac{1}{2}}| \leq \frac{1}{2} \Delta t\}$  pour la solution linéaire par morceaux  $\hat{z}(x, t)$ :

$$\frac{\partial \hat{z}}{\partial t} + \frac{\partial \hat{f}}{\partial x} = 0, \quad (4.25)$$

et le flux numérique s’obtient sous la forme intégrale:

$$f_{i+\frac{1}{2}}^* = \frac{1}{\Delta t} \int_{T^{n+\frac{1}{2}}} \hat{f}(\hat{z}(x_{i+\frac{1}{2}}, t)) dt, \quad (4.26)$$

A l'interface  $x_{i+\frac{1}{2}}$ , pour  $t \in T^{n+\frac{1}{2}}$ , la solution est comprise entre  $z_i^n$  et  $z_{i+1}^n$ . Alors, selon Le Veque (1992), [77], le flux modifié s'exprime par:

$$\hat{f}(\hat{z}(x_{i+\frac{1}{2}}, t)) = \begin{cases} f(z_i^n) + (\hat{z}(x_{i+\frac{1}{2}}, t) - z_i^n)\hat{a}_{i+\frac{1}{2}} & \text{si } \hat{a}_{i+\frac{1}{2}} > 0 \\ f(z_{i+1}^n) + (\hat{z}(x_{i+\frac{1}{2}}, t) - z_{i+1}^n)\hat{a}_{i+\frac{1}{2}} & \text{si } \hat{a}_{i+\frac{1}{2}} < 0 \end{cases} \quad (4.27)$$

avec la vitesse caractéristique à l'interface:

$$\hat{a}_{i+\frac{1}{2}} = \frac{f(z_{i+1}^n) - f(z_i^n)}{z_{i+1}^n - z_i^n}$$

Au voisinage de l'interface  $x_{i+\frac{1}{2}}$ , la loi de conservation modifiée (4.25) se réduit à l'équation d'advection:

$$\frac{\partial \hat{z}}{\partial t} + \hat{a}_{i+\frac{1}{2}} \frac{\partial \hat{z}}{\partial x} = 0$$

donc la solution à l'interface à l'instant  $t$  peut être déduite "en remontant" sa courbe caractéristique (à la vitesse  $\hat{a}_{i+\frac{1}{2}}$ ):

$$\hat{z}(x_{i+\frac{1}{2}}, t) = \hat{z}(x_{i+\frac{1}{2}} - (t - t^n)\hat{a}_{i+\frac{1}{2}}, t^n)$$

sous la condition CFL:

$$\max(|\hat{a}|) \leq \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

La solution continue par morceaux est advectée parfaitement le long des caractéristiques de l'équation de transport:

$$\hat{z}(x_{i+\frac{1}{2}}, t) = \begin{cases} z_i^n + \left(\frac{\Delta x}{2} - (t - t^n)\hat{a}_{i+\frac{1}{2}}\right) \frac{z_i^n}{\Delta x} & \text{si } \hat{a}_{i+\frac{1}{2}} > 0, \\ z_{i+1}^n + \left(-\frac{\Delta x}{2} - (t - t^n)\hat{a}_{i+\frac{1}{2}}\right) \frac{z_{i+1}^n}{\Delta x} & \text{si } \hat{a}_{i+\frac{1}{2}} < 0. \end{cases}$$

Finalement, on en déduit le flux numérique (4.26):

$$f_{i+\frac{1}{2}}^* = \begin{cases} f(z_i^n) + \frac{1}{2}\hat{a}_{i+\frac{1}{2}} \left(1 - \lambda\hat{a}_{i+\frac{1}{2}}\right) z_i^n & \text{si } \hat{a}_{i+\frac{1}{2}} > 0, \\ f(z_{i+1}^n) + \frac{1}{2}\hat{a}_{i+\frac{1}{2}} \left(-1 - \lambda\hat{a}_{i+\frac{1}{2}}\right) z_{i+1}^n & \text{si } \hat{a}_{i+\frac{1}{2}} < 0. \end{cases} \quad (4.28)$$

Dans la reconstruction linéaire par morceaux (4.24), si on choisit une pente telle que:

$$\hat{z}_i = z_{i+1}^n - z_i^n \quad \text{pour } \hat{a}_{i+\frac{1}{2}} > 0,$$

on constate que le flux numérique (4.28) correspond au flux numérique du schéma de Lax-Wendroff.

Pour rendre ce schéma TVD, on choisit des pentes  $\acute{z}_i^n$  appropriées en utilisant par exemple le limiteur  $MM_\beta$  définie par:

$$\acute{z}_i = MM_\beta \left[ \beta(z_{i+1}^n - z_i^n), \frac{1}{2}(z_{i+1}^n - z_{i-1}^n), \beta(z_i^n - z_{i-1}^n), \right], \quad (4.29)$$

avec

$$MM\{v_1, v_2, \dots\} = \begin{cases} \min_p\{v_p\} & \text{si } v_p > 0 \forall p, \\ \max_p\{v_p\} & \text{si } v_p < 0 \forall p, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (4.30)$$

Ce schéma est l'équivalent du schéma Lax Wendroff TVD à limiteur de flux. Ici cependant, la limitation est faite directement sur la pente de la solution reconstruite tandis que dans la méthode LWTVD la limitation porte sur les flux.

### b. intégration par volumes finis

Dans le contexte des volumes finis, on connaît initialement une solution moyenne par maille (constante par morceaux) de la forme:

$$z(x, t^n) = \bar{z}_i^n, \forall x \in I_i,$$

où  $\bar{z}_i^n$  est la moyenne approchée à  $t = t^n$  sur la cellule centrée en  $x_i$ ,  $I_i = \{x \mid |x - x_i| \leq \frac{1}{2}\Delta x\}$ :

$$\bar{z}_i^n = \frac{1}{\Delta x} \int_{I_i} z(x, t^n) dx \quad (4.31)$$

Comme précédemment, on redéfinit une solution approchée linéaire par morceaux de la forme:

$$z(x, t^n) = \bar{z}_i^n + \acute{z}_i \left( \frac{x - x_i}{\Delta x} \right), \forall x \in I_i \quad (4.32)$$

où  $\acute{z}_i$  est la pente discrète reconstruite à partir de la solution moyenne sur la cellule.

Vincent et al. (1999), [143] présentent un schéma numérique pour résoudre l'équation d'advection linéaire sur la cellule  $I_i$ :

$$\frac{\partial z}{\partial t} + a \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \quad (4.33)$$

En utilisant la méthode des caractéristiques, l'équation d'advection locale (4.33) est résolue exactement:

$$z(x, t^{n+1}) = z(x - a\Delta t, t^n), \forall x \in I_{i+\frac{1}{2}} \quad (4.34)$$

Par la définition (4.31), la solution moyenne sur la cellule  $I_i$  à l'instant  $t^{n+1}$  est obtenue par l'intégration spatiale suivante:

$$\bar{z}_i^{n+1} = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} z(x - a\Delta t, t^n) dx \quad (4.35)$$

et l'intégration pour une vitesse constante  $a > 0$  conduit au flux numérique MC:

$$f_{i+\frac{1}{2}}^* = f(z_i^n) + \frac{1}{2}a(1 - \lambda a) z_i^n \quad (4.36)$$

L'analogie du flux numérique (4.36) avec le flux numérique non-linéaire (4.28) amène Vincent et al. (1999), [143] à construire au final le schéma MCTVD très voisin de celui de Lax-Wendroff TVD non-linéaire et basé sur le limiteur de pente Superbee:

$$z_i^{n \text{ TVD}} = \Psi(\bar{r}_{i+\frac{1}{2}}^n)(\bar{z}_{i+1}^n - \bar{z}_i^n)$$

avec l'indicateur de la régularité de la solution numérique:

$$\bar{r}_{i+\frac{1}{2}}^n = \frac{\bar{z}_i^n - \bar{z}_{i-1}^n}{\bar{z}_{i+1}^n - \bar{z}_i^n}$$

### Influence du limiteur

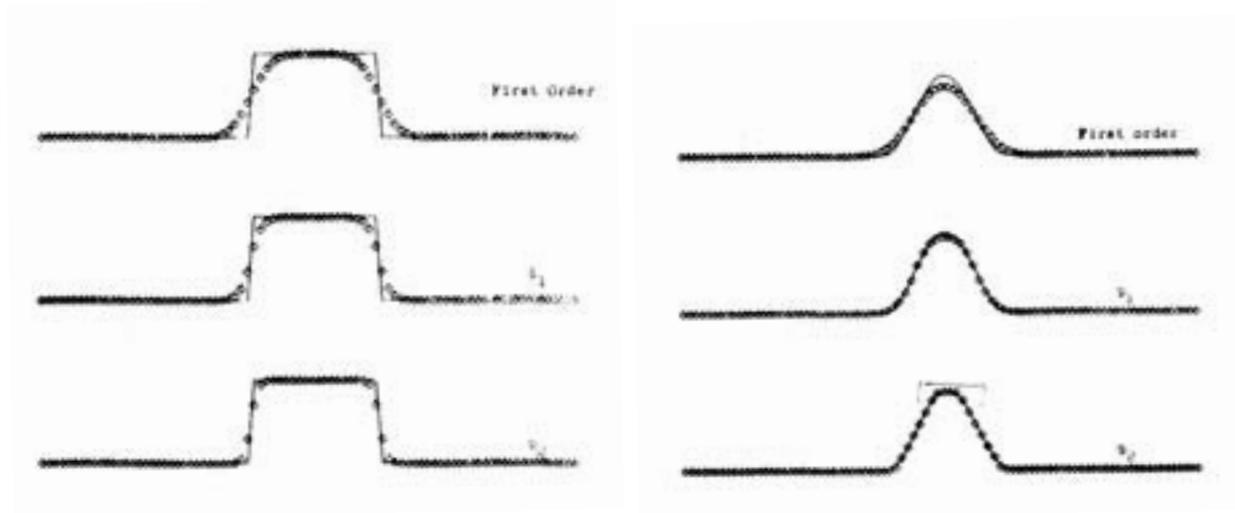
Il existe de nombreuses fonctions qui vérifient la condition (4.18) (Leveque (1992), [77]). Deux des limiteurs particulièrement utilisés font partie de la classe des  $\beta$ -*limiteurs* définis par:

$$\Psi_\beta(r) = \max[0, \min(\beta r, 1), \min(r, \beta)] \quad (4.37)$$

Le limiteur Minmod est défini par  $\beta = 1$ , tandis que  $\beta = 2$  définit le limiteur Superbee. Le limiteur de Van Leer est également très employé:

$$\Psi_{VL}(r) = \frac{r - |r|}{1 + |r|}$$

Bien entendu, chacune de ces fonctions a un impact différent sur la solution. Sweby (1984), [130], compare en particulier ces trois limiteurs sur les problèmes de convection linéaire



(a) Signal carré

 (b) Signal  $\sin^2$ 

Figure 4.2 : Comparaison des limiteurs (premier ordre, minmod, superbee) sur un cas d'advection linéaire; selon Sweby (1984), [130].

d'un créneau et d'un signal  $\sin^2$  (figure 4.2). Il montre l'effet de compression de Superbee, très bien adapté pour le créneau, mais qui tend à rendre carré le sommet du  $\sin^2$ . Minmod, malgré une diffusion supérieure mise en évidence sur le créneau, représente bien le signal  $\sin^2$  qui est plus régulier. Pour ces problèmes de convection, le limiteur de Van Leer semble le bon compromis entre les deux précédents. Cependant, la  $CFL_{TVD}$  qui lui est associée (la même que Superbee) est plus restrictive que pour le Minmod, puisque selon (4.19) on a:

$$\Phi_{Minmod} = 1 \Rightarrow CFL_{TVD} \leq \frac{2}{3} \quad (4.38)$$

$$\Phi_{Superbee} = \Phi_{VL} = 2 \Rightarrow CFL_{TVD} \leq \frac{1}{2} \quad (4.39)$$

Même en présence de dunes sous-marines fortement dissymétriques, le profil des fonds sableux reste assez doux, l'utilisation du limiteur Minmod et donc préférable au limiteur Superbee.

### Extension des schémas TVD en 2D

Pour préserver l'ordre des schémas TVD en 2D, on peut étendre les schémas 1D par une méthode prédicteur-correcteur ou bien par une méthode à pas fractionné de type Strang (*time splitting*). Par exemple, Vincent et al. (1999) présentent un schéma de Lax-Wendroff TVD à limiteur Superbee en 3D directement déduit de la formulation 1D. Ils appliquent en séquence le schéma 1D dans chaque direction en prenant comme solution de référence la solution advectée dans la direction précédente:

$$\begin{aligned} z_{i,j}^{n*} = z_{i,j}^n & - \lambda_x \max(0, a_x)(z_{i,j}^n - z_{i-1,j}^n) - \lambda_x \min(0, a_x)(z_{i+1,j}^n - z_{i,j}^n) \\ & + \frac{1}{2} \lambda_x \max(0, a_x)(\lambda_x a_x - 1) (\dot{z}_{x_{i,j}}^{n TVD} - \dot{z}_{x_{i-1,j}}^{n TVD}) \\ & + \frac{1}{2} \lambda_x \min(0, a_x)(\lambda_x a_x + 1) (\dot{z}_{x_{i+1,j}}^{n TVD} - \dot{z}_{x_{i,j}}^{n TVD}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_{i,j}^{n+1} = z_{i,j}^{n*} & - \lambda_y \max(0, a_y)(z_{i,j}^{n*} - z_{i,j-1}^{n*}) - \lambda_y \min(0, a_y)(z_{i,j+1}^{n*} - z_{i,j}^{n*}) \\ & + \frac{1}{2} \lambda_y \max(0, a_y)(\lambda_y a_y - 1) (\dot{z}_{y_{i,j}}^{n* TVD} - \dot{z}_{y_{i,j-1}}^{n* TVD}) \\ & + \frac{1}{2} \lambda_y \min(0, a_y)(\lambda_y a_y + 1) (\dot{z}_{y_{i,j+1}}^{n* TVD} - \dot{z}_{y_{i,j}}^{n* TVD}) \end{aligned}$$

Toutefois, il faut noter que ces techniques d'adaptation des schémas TVD 1D en plusieurs dimensions peuvent introduire de légères distorsions lorsque le champs des vitesses d'advection est fortement cisailé.

On présente une comparaison les différents schémas TVD dans la section 4.3. On retient le schéma MCTVD pour ces bonnes performances, cependant, comme on l'a précisé avant, le limiteur Superbee "sur-comprime" les solutions et il serait souhaitable d'exploiter le limiteur Minmod.

### 4.2.2 Schéma NOCS pour intégrer les lois de conservation hyperboliques

A la différence des schémas TVD présentés dans le paragraphe précédent, le schéma central non-oscillant (NOCS) permet d'intégrer directement par volumes finis les lois de conservation hyperboliques, au second ordre en espace et en temps, sans recourir à

l'estimation d'une vitesse caractéristique d'advection (Jiang (1998), [69], [68]). En fait, ce schéma est basé sur la modification des schémas essentiellement non-oscillants (ENO) proposée par Shu et Osher (1989), [118].

A partir de la moyenne de la solution sur les cellules du maillage, cette méthode se décompose en deux étapes. D'abord, on prédit la solution discrète des moyennes initiales basée sur une reconstruction non-oscillante affine par morceaux. Ensuite, en guise de correction, on exploite cette solution discrète en intégrant la loi de conservation sur des cellules décalées.

Pour approcher la loi de conservation (4.3) par un schéma central, on considère initialement une solution constante par morceaux de la forme:

$$z(x, t^n) = \bar{z}_i^n \quad \forall x \in I_i = \{x \mid |x - x_i| \leq \frac{1}{2}\Delta x\}$$

où  $\bar{z}_i^n$  est la moyenne approchée à  $t = t^n$  sur la cellule  $I_i$  centrée sur  $x_i$ . On définit alors la solution moyenne par:

$$\bar{z}_i^n = \frac{1}{\Delta x} \int_{I_i} z(x, t^n) dx$$

La première étape consiste à reconstruire une solution approchée, linéaire par morceaux, de la forme:

$$z(x, t^n) = \bar{z}_i^n + \acute{z}_i \left( \frac{x - x_i}{\Delta x} \right) \quad \forall x \in I_i = \{x \mid |x - x_i| \leq \frac{1}{2}\Delta x\} \quad (4.40)$$

où  $\acute{z}_i$  est la pente discrète reconstruite à partir de la solution moyenne sur la cellule. Pour garantir une précision à l'ordre 2, cette pente doit approcher la dérivée spatiale correspondante au même ordre:

$$\acute{z}_i = \Delta x \frac{\partial z}{\partial x}(x_i, t^n) + o(\Delta x^2) \quad (4.41)$$

De plus, pour respecter le principe du maximum des approximations scalaires, les pentes discrètes sont reconstruites par l'intermédiaire d'un limiteur. Ici, on utilise la famille des  $\beta$ -*limiteurs* définie par

$$\acute{z}_i = MM_\beta \left[ \beta(\bar{z}_{i+1}^n - \bar{z}_i^n), \frac{1}{2}(\bar{z}_{i+1}^n - \bar{z}_{i-1}^n), \beta(\bar{z}_i^n - \bar{z}_{i-1}^n) \right],$$

avec la fonction limiteur:

$$MM\{v_1, v_2, \dots\} = \begin{cases} \min_p\{v_p\} & \text{si } v_p > 0 \forall p, \\ \max_p\{v_p\} & \text{si } v_p < 0 \forall p, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (4.42)$$

La deuxième étape consiste à intégrer la loi de conservation (4.3) sur le volume de contrôle décalé en espace  $I_{i+\frac{1}{2}}$  et sur l'intervalle de temps  $T_{n+\frac{1}{2}} = [t^n, t^{n+1}]$ . On obtient l'expression exacte:

$$\bar{z}_{i+\frac{1}{2}}^{n+1} = \bar{z}_{i+\frac{1}{2}}^n - \lambda \left[ \frac{1}{\Delta t} \int_{T_{n+\frac{1}{2}}} (f_{i+1}(t) - f_i(t)) dt \right] \quad (4.43)$$

où la solution moyenne décalée est exprimée en fonction de la solution continue par morceaux (4.40):

$$\bar{z}_{i+\frac{1}{2}}^n = \frac{1}{2}(\bar{z}_i^n + \bar{z}_{i+1}^n) + \frac{1}{8}(\dot{z}_i - \dot{z}_{i+1}) \quad (4.44)$$

On approche l'intégrale temporelle dans (4.43) à l'ordre 2 en temps par:

$$\frac{1}{\Delta t} \int_{T_{n+\frac{1}{2}}} f_i(t) dt = f_i^{n+\frac{1}{2}} + o(\Delta t^2)$$

où

$$f_i^{n+\frac{1}{2}} = f(z_i^{n+\frac{1}{2}}) \quad (4.45)$$

La solution discrète intermédiaire  $z_i^{n+\frac{1}{2}}$  proposée par Jiang (1998), [69], est obtenue par un développement de Taylor à l'ordre 2:

$$z_i^{n+\frac{1}{2}} = \bar{z}_i^n + \frac{1}{2} \Delta t \frac{\partial z}{\partial t}(x_i, t^n) + o(\Delta t^2)$$

où  $\frac{\partial z}{\partial t}$  est exprimé en fonction de la variation spatiale du flux comme dans le schéma de Lax-Wendroff. Le flux étant reconstruit de la même manière que la solution (4.40) avec (4.41), on en déduit la solution discrète intermédiaire:

$$z_i^{n+\frac{1}{2}} = \bar{z}_i^n - \frac{1}{2} \lambda f'_i \quad (4.46)$$

Ainsi, avec la définition du prédicteur (4.45) et (4.46), on obtient la solution moyenne sur une cellule décalée à l'instant  $t^{n+1}$  du schéma central non-oscillant (NOCS) à l'ordre 2:

$$\bar{z}_{i+\frac{1}{2}}^{n+1} = \frac{1}{2}(\bar{z}_i^n + \bar{z}_{i+1}^n) + \frac{1}{8}(\dot{z}_i - \dot{z}_{i+1}) - \lambda \left[ f_{i+1}^{n+\frac{1}{2}} - f_i^{n+\frac{1}{2}} \right]$$

### Extension du schéma NOCS en 2D

La méthode NOCS permet de traiter directement l'intégration en volume finis de la loi de conservation hyperbolique et elle peut s'appliquer directement en 2D sans dégrader ses propriétés initiales:

$$\begin{aligned}
 z_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} &= \bar{z}_{i,j}^n - \frac{1}{2}\lambda_x \dot{f}_{x_{i,j}} - \frac{1}{2}\lambda_y \dot{f}_{y_{i,j}} \\
 \bar{z}_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{n+1} &= \frac{1}{4}(\bar{z}_{i,j}^n + \bar{z}_{i+1,j}^n + \bar{z}_{i,j+1}^n + \bar{z}_{i+1,j+1}^n) \\
 &+ \frac{1}{16}(\dot{z}_{x_{i,j}} - \dot{z}_{x_{i+1,j}}) - \frac{1}{2}\lambda_x \left[ f_{x_{i+1,j}}^{n+\frac{1}{2}} - f_{x_{i,j}}^{n+\frac{1}{2}} \right] \\
 &+ \frac{1}{16}(\dot{z}_{y_{i,j}} - \dot{z}_{y_{i,j+1}}) - \frac{1}{2}\lambda_y \left[ f_{y_{i,j+1}}^{n+\frac{1}{2}} - f_{y_{i,j}}^{n+\frac{1}{2}} \right]
 \end{aligned}$$

### Inconvénients et améliorations de la méthode

L'inconvénient majeur de cette technique est que la diffusion numérique de ce schéma, permettant de compenser les effets de dispersion (oscillations) au voisinage des irrégularités, est directement influencée par la CFL qu'on utilise (Bianco et al. (1999), [13]). Ainsi, de par l'intégration spatiale décalée de la solution reconstruite, on remarque que la solution diffuse inévitablement au cours du temps au voisinage d'une discontinuité, même si le bilan de flux est nul (figure 4.3).

Un inconvénient mineur est le décalage spatial du maillage de la solution à chaque itération. Jiang et al. (1998), [68], proposent néanmoins une modification simple de la méthode pour s'affranchir de ce décalage. La solution reste sur le maillage d'origine si on intègre deux fois la loi de conservation. Cela permet de rendre la méthode plus pratique à utiliser malgré une légère augmentation de la diffusion générale.

Dans des problèmes très irréguliers, pour contrôler plus efficacement le problème de diffusion, l'utilisation d'une résolution multigrille semblerait bien adaptée car l'analyse de l'erreur lors du raffinement offre la possibilité d'identifier si la solution est régulière ou discontinue (Bihari et Harten (1997), [14]; Arandiga et al (1999), [3]). De ce fait il est possible de raffiner le maillage dans les zones irrégulières et d'obtenir une solution moins diffusée.

On peut améliorer le schéma NOCS sur deux autres points: (i) suppression de l'étape prédicteur (NOCS12) et (ii) modification des limiteurs (NOCS12p).

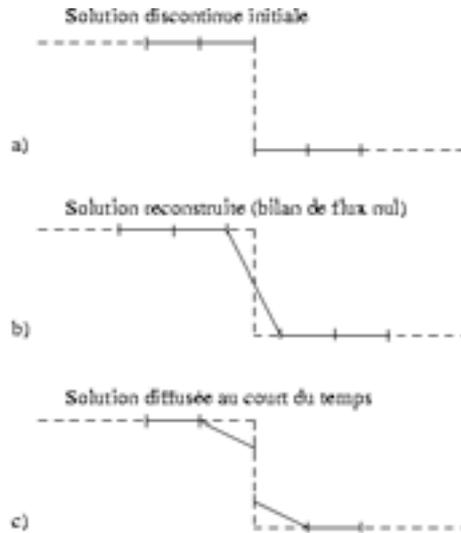


Figure 4.3 : Illustration d'une cause majeure de la diffusion du schéma NOCS au cours du temps (a,b puis c), sur une solution initialement irrégulière (discontinue) et lorsque le bilan de flux est nul.

Tout d'abord, on propose d'améliorer le prédicteur (4.46) en exprimant la solution intermédiaire en fonction des instants précédents:

$$z_i^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(3z_i^n - z_i^{n-1}) \quad (4.47)$$

Cette estimation est également à l'ordre 2 en temps et permet de réduire de moitié le temps d'un cycle de calcul de la méthode NOCS.

Ensuite, on a redéfini le limiteur utilisé pour reconstruire la solution. La pente locale peut être limitée en tenant compte de la régularité de la solution, c'est pourquoi, comme dans le schéma de LWTVD, on exploite les fonctions de pondération  $\Psi$ . La pente décrite par le limiteur  $MM$  dans (4.37) est désormais déterminée par

$$\hat{z}_i = \Psi \left( \frac{\bar{z}_i^n - \bar{z}_{i-1}^n}{\bar{z}_{i+1}^n - \bar{z}_i^n} \right) (z_{i+1}^n - z_i^n),$$

On note également que le limiteur décrit initialement dans NOCS n'est pas entièrement satisfaisant et ne permet pas de supprimer totalement les oscillations obliques. Pour cela, on a testé une reconstruction de la solution sur 9 points pour prendre en compte tous les noeuds voisins. Cette technique n'a cependant pas permis de gommer les petites oscillations qui apparaissent sur des fronts obliques.

## 4.3 Comparaison des méthodes

On compare les méthodes précédentes UPW1, UPW2TVD, LWTVD, NOCS et MCTVD, d'une part sur un cas 1D de transport sédimentaire non-linéaire dont on présente la solution analytique, et d'autre part sur le cas qualitatif de l'équation de Burger 2D avec une solution initiale discontinue.

Dans le cadre de la morphodynamique sédimentaire sur les plages, ces configurations de validation très irrégulières sont extrêmes, mais elles présentent l'avantage de tester véritablement le comportement des schémas pour des problèmes hyperboliques fortement non-linéaires.

### 4.3.1 Morphodynamique 1D avec une solution analytique

Le problème consiste à résoudre l'évolution morphodynamique simplifiée d'une dune initialement en forme de créneau par la théorie des caractéristiques (figure 4.4).

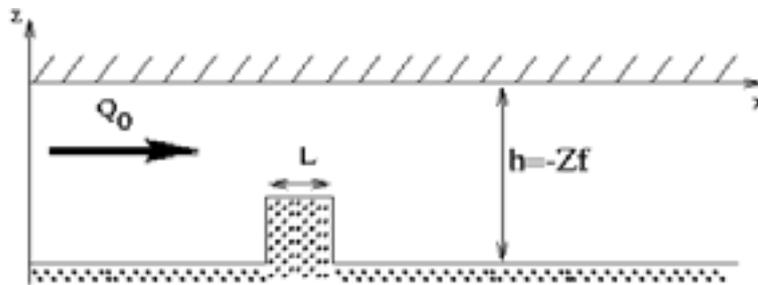


Figure 4.4 : Illustration de la condition initiale du problème morphodynamique 1D simplifié.

On suppose que la surface libre (rigide) de l'écoulement reste horizontale, donc la profondeur est donnée directement par la cote du fond:

$$h + Z_f = 0$$

L'écoulement stationnaire 1D est maintenu par un débit constant ( $Q_0$ ). Le flux de sédiment est défini par la formule de transport de Engelund-Hansen:

$$Q_t = \alpha_0 Q_0^m (-Z_f)^{-m} \quad \text{avec} \quad \alpha_0 = \frac{0.05}{(s-1)^2 \sqrt{g} d_{50} C_{h_0}^3} \quad (4.48)$$

où le débit liquide  $Q_0 = 5 \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ , la hauteur d'eau  $h_0 = 10 \text{ m}$ , la densité spécifique du sédiment  $s = 2.65$ , l'accélération de la gravité  $g = 9.81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ , le diamètre moyen du

sédiment  $d_{50} = 2.10^{-4} \text{ m}$  et le coefficient de Chézy  $C_{h_0} = 18 \log\left(\frac{12h_0}{3d_{50}}\right)$  sont supposés constants.

La loi de conservation du sédiment est donnée par:

$$\frac{\partial Z_f}{\partial t} + \frac{\partial Q_t}{\partial x} = 0, \quad (4.49)$$

avec  $Z_f(x, t)$  la cote du fond et  $Q_t$  le flux de sédiment. La solution initiale est un créneau:

$$Z_f(x, 0) = \begin{cases} Z_{f1} & \text{si } 0 \leq x - \epsilon \leq L, \\ Z_{f0} & \text{sinon,} \end{cases}$$

avec  $Z_{f1} = -9 \text{ m}$  et  $Z_{f0} = -10 \text{ m}$  pour une longueur  $L = 250 \text{ m}$ . On introduit le déphasage d'une demi-maille ( $\epsilon = \frac{1}{2}\Delta x$ ) pour obtenir les discontinuités initiales sur les interfaces des cellules du maillage plutôt que sur le maillage lui-même. Ainsi, on évite un décalage entre la solution initiale exacte continue  $Z_f(x, 0)$  et la solution initiale exacte discrète  $Z_f(x_i, 0)$ .

Avec la définition (4.48) du flux de sédiment, on reformule facilement la loi de conservation (4.49) pour faire apparaître la vitesse caractéristique non-linéaire  $a(Z_f)$  d'un problème d'advection:

$$\frac{\partial Z_f}{\partial t} + a(Z_f) \frac{\partial Z_f}{\partial x} = 0 \quad \text{avec} \quad a(Z_f) = \frac{\partial Q_t}{\partial Z_f} = m\alpha_0 Q_0^m (-Z_f)^{-m-1}$$

Ainsi, par rapport à la solution initiale, on distingue deux vitesses caractéristiques de propagation majeures de la solution:  $a_0 = a(Z_{f0})$  pour le bas du créneau et  $a_1 = a(Z_{f1})$  pour le sommet de la dune. Dans un premier temps, la construction des courbes caractéristiques fait apparaître 3 régions du plan  $(x, t)$  distinctes (figure 4.5). Dans les zones où les droites caractéristiques sont localement parallèles entre elles, le créneau est convecté sans déformation aux vitesses  $a_0$  et  $a_1$ . Ensuite, à l'interface de ces régions, on observe 2 zones de transitions typiques de la propagation d'une onde non-linéaire: (i) d'abord en  $x - \epsilon = 0$ , la divergence initiale des courbes caractéristiques préfigure la formation d'une onde de détente ( $^{od}$ ), (ii) puis en  $x - \epsilon = L$ , la convergence initiale des courbes caractéristiques qui conduit à la formation d'un choc ( $^{oc}$ ).

Au niveau de ces interfaces, on connaît l'état à gauche ( $_g$ ) et l'état à droite ( $_d$ ), par conséquent la solution est obtenue en résolvant deux problèmes de Riemann distincts (Leveque (1992), [77]):

(i) la solution de l'onde de détente pour ce problème scalaire convexe est donnée par:

$$Z_f(x, t) = \hat{Z}_f\left(\frac{x - \epsilon}{t}\right), \quad a_g^{od}t \leq x - \epsilon \leq a_d^{od}t,$$

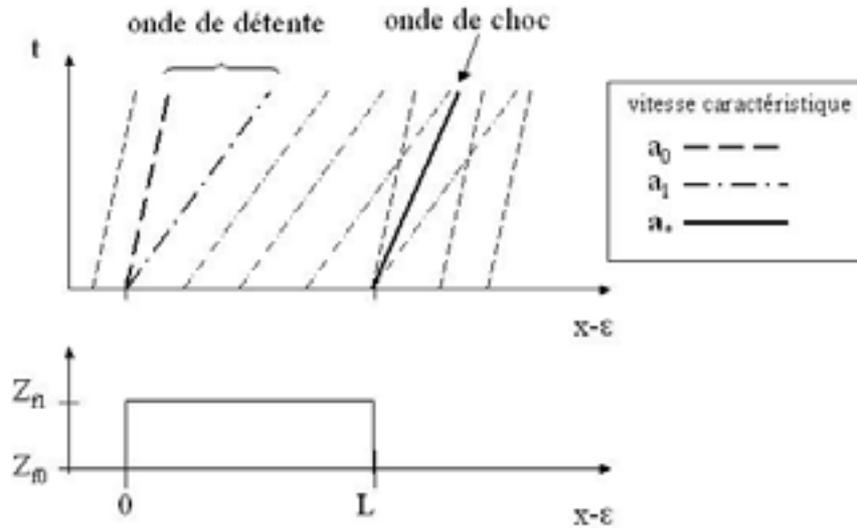


Figure 4.5 : Courbes caractéristiques initiales du créneau.

où  $\hat{Z}_f(\xi)$  est solution de  $Q'_t(\hat{Z}_f(\xi)) = \xi$ , c'est-à-dire

$$\hat{Z}_f(\xi) = - \left( \frac{m\alpha_0 Q_0^m}{\xi} \right)^{\frac{1}{m+1}}$$

(ii) l'onde de choc quant à elle doit vérifier la condition de saut de Rankine-Hugoniot qui relie la vitesse de propagation du choc  $a_*$  aux variations de la solution et du flux à travers le choc:

$$a_* = \frac{(Q_{tg}^{oc} - Q_{td}^{oc})}{(Z_{fg}^{oc} - Z_{fd}^{oc})} \quad (4.50)$$

tandis que l'existence du choc est soumise à la condition d'entropie de Lax:

$$a_g^{oc} \leq a_* \leq a_d^{oc}$$

Tant que l'onde de détente n'interagit pas avec l'onde de choc, on a:

$$\begin{aligned} a_g^{od} &\equiv a_0 \quad , \quad a_d^{od} \equiv a_1, \\ a_g^{oc} &\equiv a_1 \quad , \quad a_d^{oc} \equiv a_0, \\ Z_{fg}^{oc} &\equiv Z_{f1} \quad , \quad Z_{fd}^{oc} \equiv Z_{f0}, \\ Q_{tg}^{oc} &\equiv Q_{t1} \quad , \quad Q_{td}^{oc} \equiv Q_{t0}, \end{aligned}$$

On en déduit que la vitesse du choc (4.50) reste constante et que la solution exacte de ce

problème est donnée par:

$$Z_f(x, t) = \begin{cases} Z_{f0} & \text{si } x - \epsilon \leq a_0 t, \\ \hat{Z}_f\left(\frac{x-\epsilon}{t}\right) & \text{si } a_0 t \leq x - \epsilon \leq a_1 t, \\ Z_{f1} & \text{si } a_1 t \leq x - \epsilon \leq a_* t, \\ Z_{f0} & \text{si } a_* t + L \leq x - \epsilon. \end{cases} \quad \forall t \leq \frac{L}{a_1 - a_*}$$

Les figures (4.6) et (4.7) illustrent les résultats numériques obtenus sur ce cas test. On constate que la méthode UPW2TVD ne converge pas vers la bonne solution du problème, alors que les autres schémas donnent tous de bons résultats avec peu d'écart entre les différentes méthodes. Toutes les méthodes présentées sont plus efficaces que le simple schéma upwind (UPW) et nous vérifions qu'elles sont bien d'ordre supérieur à 1 en espace. Le tableau 4.1 récapitule les erreurs relatives et les ordres de convergence spatiale pour chaque méthode. Les colonnes relatives à la norme  $N_\infty$  sont données à titre indicatif car elles ne sont pas représentatives dans le cas où la solution présente des discontinuités.

On remarque que le schéma UPW1 diffuse fortement. Par contre, le schéma UPW2TVD, malgré la bonne représentation du front, n'est pas du tout satisfaisant car l'onde de détente est "surcomprimée". On constate bien que le résultat obtenu par la méthode MCTVD est très voisin de celui obtenu par la méthode LWTVD.

On observe également que les schémas NOCS se comportent bien malgré une diffusion supérieure au schéma LWTVD. De par la méthode d'intégration décalée les schémas NOCS sont très sensibles à la CFL, et réduire la CFL augmente l'effet de diffusion de NOCS. Le nouveau prédicteur de la méthode NOCS12 permet de réduire le temps de calcul tout en conservant les propriétés du schéma de base. Dans le schéma NOCS12p, l'utilisation du limiteur basé sur l'indicateur de régularité permet de réduire significativement la diffusion du schéma de base mais ce limiteur semble trop "violent" car il rend la partie haute de l'onde de détente "carrée".

On retiendra de ce cas de validation que les méthodes NOCS et MCTVD permettent de résoudre à un ordre supérieur à 1, les problèmes de morphodynamique même sur une bathymétrie très irrégulière.

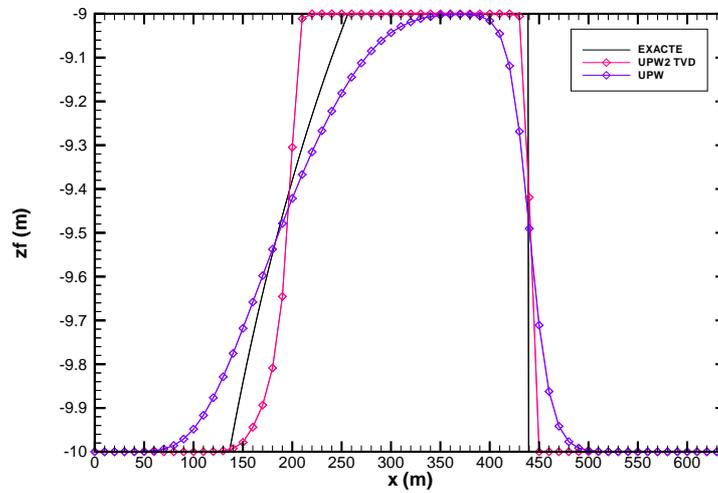


Figure 4.6 : Comparaison des schémas Upwind après 64 pas de temps à une CFL de 0.4 (64 noeuds).

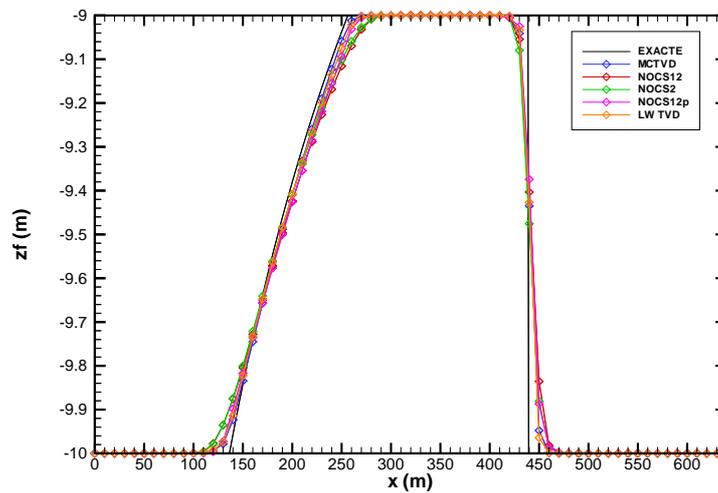


Figure 4.7 : Comparaison des schémas centrés après 64 pas de temps à une CFL de 0.4 (64 noeuds).

Tableau 4.1 : Comparaison des schémas TVD d'ordre supérieur par rapport à la loi de conservation hyperbolique non-linéaire.

Schéma	$LM$	Erreur $N_\infty$	Erreur $N_2$	Ordre $N_\infty$	Ordre $N_2$
$CFL = 0.4$					
ATVD	32	8.666e-2	2.029e-3	-	-
	64	5.651e-2	6.371e-4	0.6170	1.671
	128	4.799e-2	2.703e-4	0.2356	1.237
	256	3.003e-2	9.154e-5	0.6765	1.562
LWTVD	32	8.814e-2	2.057e-3	-	-
	64	5.733e-2	6.480e-4	0.6204	1.667
	128	4.716e-2	2.664e-4	0.2819	1.282
	256	2.852e-2	8.661e-5	0.7255	1.621
NOCS12	32	8.446e-2	2.156e-3	-	-
	64	5.966e-2	7.294e-4	0.5016	1.563
	128	5.393e-2	3.237e-4	0.1456	1.172
	256	4.144e-2	1.288e-4	0.3801	1.330
NOCS12p	32	8.696e-2	2.154e-3	-	-
	64	6.258e-2	7.280e-4	0.4746	1.565
	128	5.248e-2	3.022e-4	0.2539	1.269
	256	3.896e-2	1.162e-4	0.4299	1.379
NOCS 2	32	7.878e-2	1.955e-3	-	-
	64	5.245e-2	6.368e-4	0.5868	1.618
	128	4.631e-2	2.814e-4	0.1797	1.178
	256	3.400e-2	1.164e-4	0.4457	1.274

### 4.3.2 Equation de Burger 2D

Dans ce test, on résout l'équation de Burger 2D défini par:

$$\frac{\partial Z_f}{\partial t} + \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} = 0, \quad (4.51)$$

$$F_x(x, y, t) = F_y(x, y, t) = \frac{1}{2} Z_f(x, y, t)^2, \quad (4.52)$$

avec la solution initiale discontinue par morceaux représentée sur la figure (4.8):

$$Z_f(x, y, 0) = \begin{cases} -1.0 & \text{si } x \geq 0, y \geq 0, \\ -0.2 & \text{si } x \geq 0, y < 0, \\ 0.5 & \text{si } x < 0, y \leq 0, \\ 0.8 & \text{si } x < 0, y > 0, \end{cases} \quad (4.53)$$

La solution de ce problème correspond à la propagation et l'interaction des discontinuités initiales. Plusieurs ondes de chocs, dont une oblique à 45°, apparaissent ainsi qu'une onde de détente.

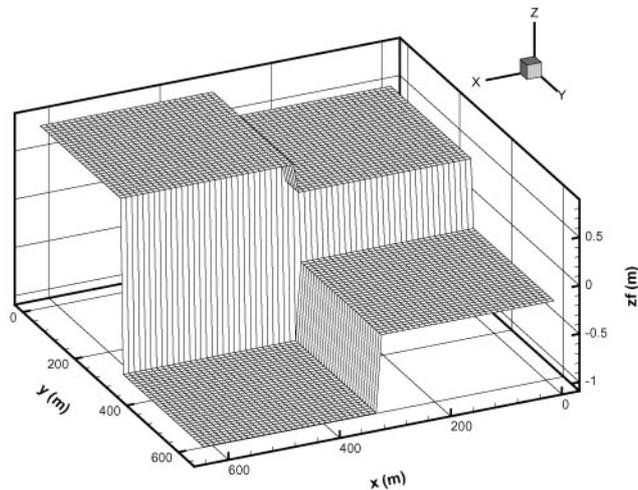
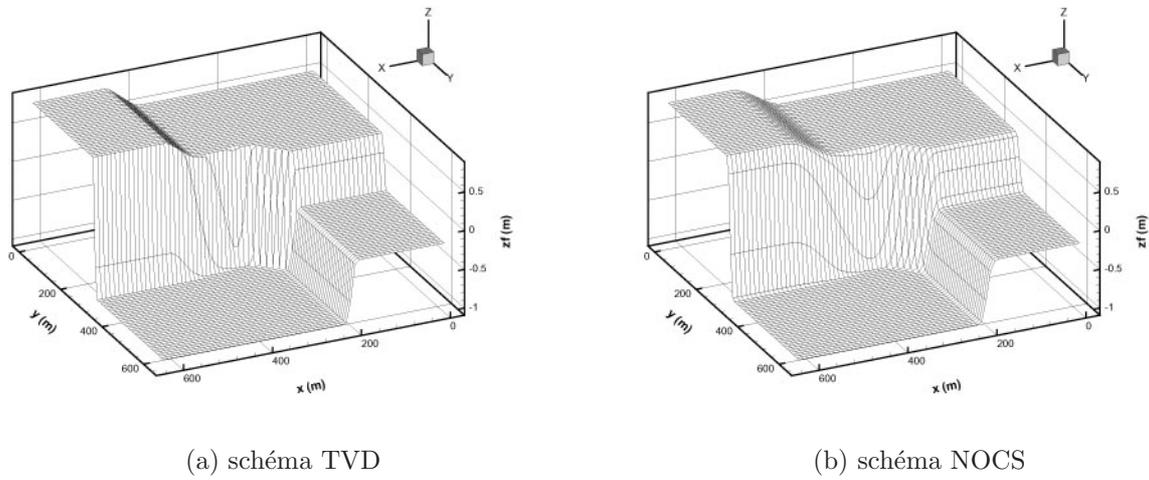


Figure 4.8 : Solution initiale du problème de Burger 2D.

Les figures (4.9a) et (4.9b) permettent de comparer qualitativement la solution du schéma NOCS12 et la solution du schéma MCTVD sur un maillage  $64 * 64$  et une  $CFL = 0.4$ . Sur ce cas 2D, les deux méthodes donnent des résultats très voisins au niveau de la représentation des discontinuités, par contre l'onde de détente est plus diffuse avec le

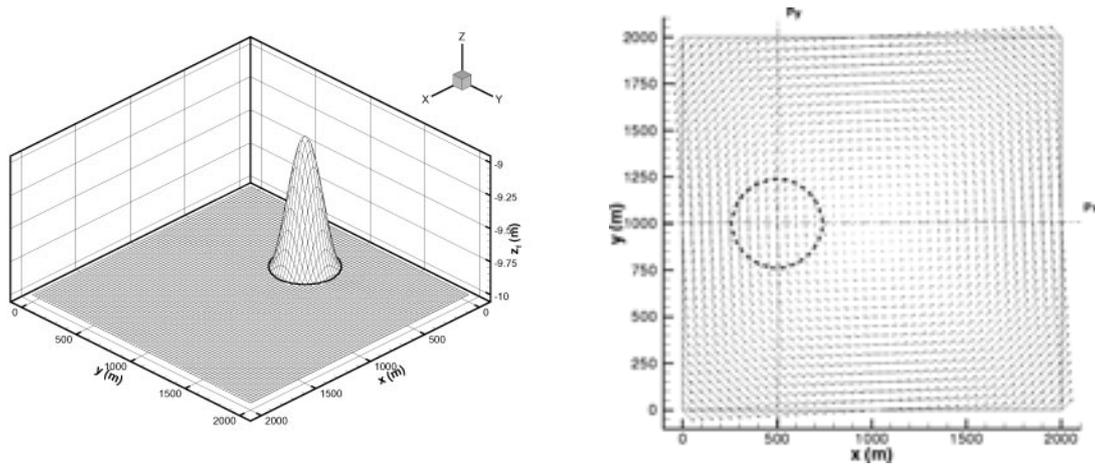


*Figure 4.9 : Solution du problème de Burger 2D après 64 pas de temps à une CFL de 0.4.*

schéma NOCS. On constate également que pour le schéma NOCS, la CFL modifie de façon importante l'intensité de la diffusion au niveau des fronts et de l'onde de détente.

### 4.3.3 Advection dans un champ de vitesse tournant

Ce test correspond au déplacement d'une dune sous-marine sous l'action dans un champ de vitesse tournant non déformant (figure 4.10). Il s'agit d'un cas d'advection linéaire (la vitesse est indépendante de la cote du fond). Théoriquement, après un mouvement circulaire, la dune doit retrouver sa position initiale, sans avoir été déformée.



(a) forme initiale de la dune sous-marine

(b) champ de vitesse tournant imposé

Figure 4.10 : Configuration de l'écoulement.

On résout l'équation de transport définie par:

$$\frac{\partial Z_f}{\partial t} + \vec{U} \cdot \vec{\nabla}(Z_f) = 0$$

Le champ de vitesse est donné par:

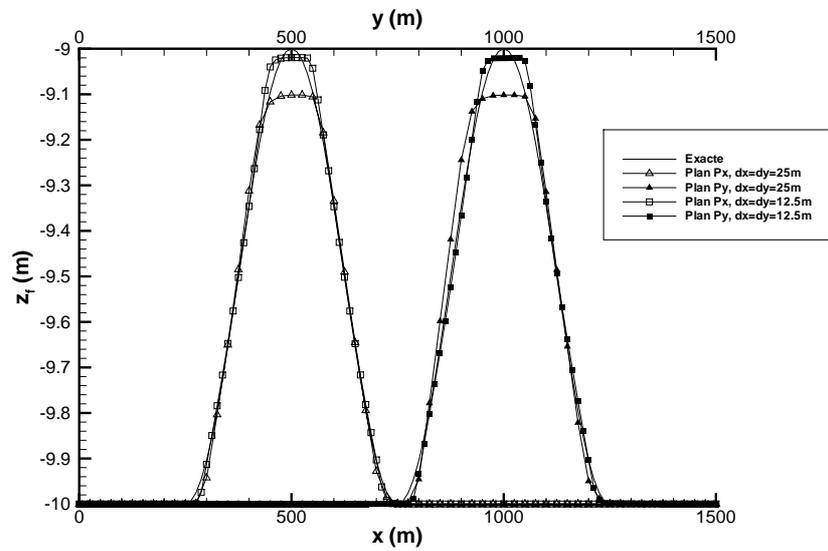
$$\begin{aligned} u(x, y) &= -U_0(y - L)/L \\ v(x, y) &= U_0(x - L)/L \end{aligned}$$

avec ici,  $U_0 = 5 \text{ m/s}$  et  $L = 1000 \text{ m}$ .

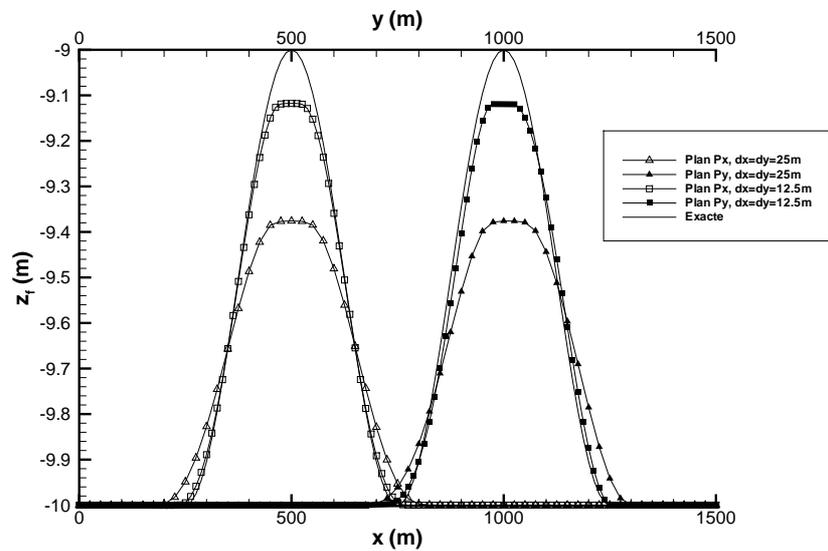
Ce cas met clairement en évidence le caractère diffusif de la méthode NOCS, et aussi son ordre supérieur à 1 (ordre 1.8). D'autre part, cette validation confirme que le schéma MCTVD est particulièrement bien adapté à la résolution du problème d'advection, car après un tour, la solution numérique reste très voisine de la solution exacte (figure 4.11a). Enfin, comme on l'avait remarqué à propos de l'influence des limiteurs, la

## 164 Chapitre 4 : Résolution numérique de la loi de conservation du sédiment

méthode MCTVD a tendance à fortement aplatir le sommet de la dune et à rendre “carré” le signal initialement sinusoïdal.



(a) Schéma MCTVD



(b) Schéma NOCS

Figure 4.11 : Profils de la dune obtenus après une rotation, dans les plans de coupe  $Px$  et  $Py$ , pour une  $CFL = 0.5$ .

## 4.4 Conclusion

Dans les cas où le flux de sédiment s'exprime de façon simple, par exemple en fonction de la hauteur d'eau et du débit liquide, et que l'écoulement est dominé par les courants (houle peu influente), il est possible d'obtenir une bonne estimation de la vitesse caractéristique d'advection des ondes de sable.

Les schémas TVD à limiteur de flux (ou de pente) sont alors un moyen efficace pour calculer une solution numérique de qualité. Connaissant parfaitement la vitesse caractéristique du problème, la loi de conservation du sédiment est bien résolue à un ordre supérieur. Aussi, les termes d'advection de l'équation des ondes de sable sont traités par la méthode MCTVD développée pour la bibliothèque de recherche AQUILON par Vincent et Caltagirone (1999),[143].

Cependant, la portée de l'équation des ondes de sable peut être trop réduite pour être représentative d'un écoulement combinant la houle et le courant. De plus, la décomposition des flux de sédiment est souvent impossible, en particulier lorsque le flux de sédiment s'exprime d'une manière complexe (formule de Bailard (2.3)).

Par conséquent, il ne faut pas négliger l'intérêt de la méthode NOCS. Malgré ses inconvénients, ce schéma reste très intéressant pour traiter la loi de conservation du sédiment dans les applications morphodynamiques car il est simple d'utilisation. C'est un bon compromis pour résoudre, à un ordre supérieur et sans oscillations parasites, les problèmes hyperboliques faiblement non-linéaires dont on ne connaît pas la vitesse caractéristique.

# Chapitre 5

## Application à la côte aquitaine :

## étude d'une plage à barres subtidales

### 5.1 Introduction

Le littoral aquitain est une côte sableuse non consolidée soumise aux houles très énergétiques de l'Atlantique Nord. Son étude a permis l'observation de barres en croissant dans la zone subtidale (figure 5.1a). Ces barres influencent la distribution spatiale de l'énergie des vagues (Froidefond et al. (1990), [53]). Leur rôle est donc essentiel vis-à-vis de l'érosion de la côte, en particulier durant les épisodes de tempêtes où les courants sont violents et les changements morphologiques rapides. Ce chapitre présente les premières investigations sur l'influence des barres pré-littorales sur la déformation du haut de la plage et des barres en croissant elles-mêmes.

Plusieurs simulations numériques de l'hydrodynamique littorale sont réalisées sur une bathymétrie représentative du littoral aquitain. Dans un premier temps, l'étude porte sur les situations d'écoulement à marée haute et à marée basse, en présence d'une houle incidente frontale puis oblique. La focalisation de la houle par la barre et son déferlement sont qualitativement en accord avec les observations faites sur le terrain. De plus, les résultats mettent en évidence l'omniprésence du courant de retour quel que soit le niveau

du plan d'eau. Les courants sagittaux à marée basse sont peu sensibles à l'incidence de la houle, alors qu'à marée haute les courants sont rapidement réorganisés lorsque la houle est oblique. Ainsi, l'influence de la hauteur du plan d'eau sur la structure des courants est mise en avant. Ces travaux ont été réalisés en collaboration avec B. Castelle du DGO (Saint-Cast et al. (2002), [113]).

Le transport sédimentaire est ensuite déduit de l'hydrodynamique moyenne, et l'évolution morphologique de la plage est simulée. Quel que soit le niveau du plan d'eau (marée haute ou marée basse), la formation d'une barre de déferlement irrégulière sur le haut de plage est mise en évidence. De plus, on observe que la barre subtidale n'est amplifiée qu'à marée basse. Ces résultats confirment la stabilité des barres subtidales en croissant observées sur la côte et insistent sur leur implication dans le façonnage de la zone intertidale et donc sur la formation des systèmes de barres et de baines.

Enfin, l'évolution morphodynamique de la plage sous l'action de la houle et des courants, et en présence de la marée est simulée. Le couplage non-linéaire entre les courants moyens et l'évolution de la bathymétrie est réalisé, en calculant le forçage induit par la houle sur la bathymétrie initiale pour différents niveaux de la marée.

## 5.2 Spécificités de la côte aquitaine

### 5.2.1 L'hydrodynamique littorale

Sur la côte aquitaine, la climatologie de la houle varie d'une saison à l'autre. Néanmoins, on peut considérer que la houle au large est de secteur N-NW dominant. La période moyenne est de  $T_{moy} = 6.5 s$ , mais elle peut atteindre exceptionnellement 25 secondes. Sa hauteur significative moyenne annuelle est estimée à  $H_{moy} = 1.36 m$ , cependant elle peut atteindre près de 10 m lors des tempêtes de printemps ou d'automne (Butel et al. (2002), [19]).

En arrivant sur la plage, les vagues engendrent des courants moyens particulièrement importants dans la zone de déferlement. Par exemple, lors de la campagne d'octobre 2001 du PNEC-ART7 (Programme National d'Environnement Côtier), pour une houle frontale de hauteur 3m et de période 13s, on a relevé des courants de retour (composante transversale du courant moyen dirigée vers le large) de l'ordre de 50cm/s. Alors que pour

une houle d'incidence  $10^\circ$ , de hauteur 2.5m et de période 14s, les courants de dérive (composante longitudinale) étaient de l'ordre de 1m/s dans la zone de déferlement.

La marée est de type semi-diurne mésotidale (marnage en vives-eaux de 5.5m et en mortes-eaux de 2m). Elle engendre des courants rotationnels sur le plateau continental inférieurs à 20cm/s. Cependant sur la plage, les courants de marée sont négligeables par rapport aux courants moyens induits par les vagues. Le mouvement de la marée est ici assimilé à la variation du niveau moyen de la mer.

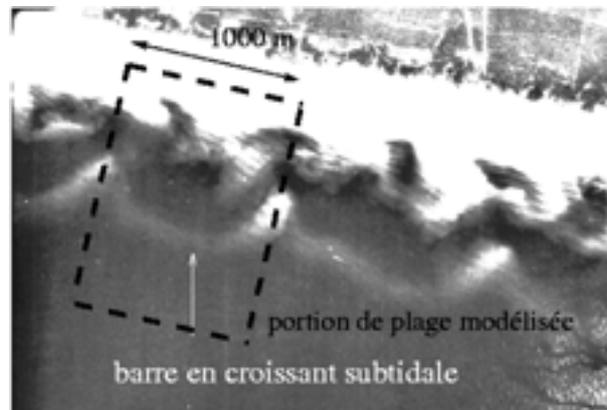
### 5.2.2 Les plages de sable

Sur les 230km de côte sableuse entre l'estuaire de la Gironde et celui de l'Adour, on observe des structures sédimentaires périodiques. Dans la zone intertidale, des systèmes de barres et de baïnes sont présents (Pedreros et al. (1996), [104]; Michel et al (1999), [87]). Dans la zone subtidale, à partir d'images satellite SPOT et de campagnes du Service Hydrographique de la Marine (SHOM), le DGO a également mis en évidence des barres en croissant (figures 2 dans l'introduction générale). Ces barres sont moins mobiles que les barres intertidales, et leur longueur d'onde moyenne est supérieure. Celle-ci varie entre 500m et 800m, mais certains croissants peuvent atteindre 1500m (Lafon et al. (2000), [74]). Leur mouvement et leur taille sont étroitement liés aux conditions hydrodynamiques moyennes.

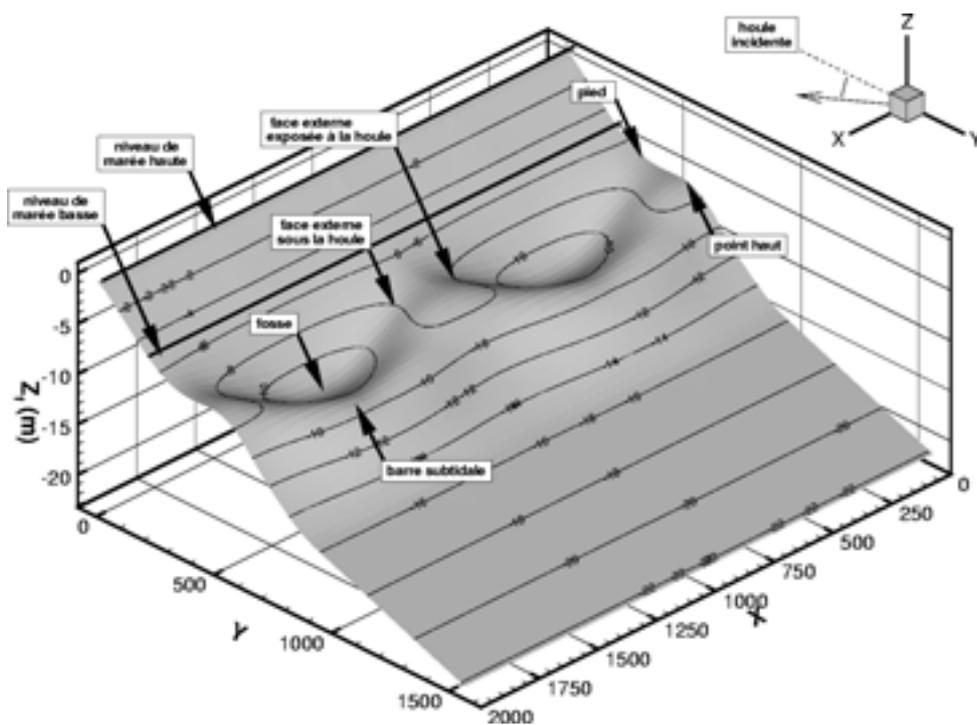
En moyennant différentes caractéristiques (longueur d'onde, pentes, profondeur...), on a créé une bathymétrie représentative de celles observées sur la côte aquitaine (cf. figure 5.1a et 5.1b). Cette plage " idéalisée " comprend une barre subtidale en croissant d'1km de longueur d'onde et une zone intertidale lissée (profil de tempête).

## 5.3 Simulation des courants moyens induits par la houle

Après avoir défini une bathymétrie type, on a simulé les courants moyens à partir du modèle 2D intégré sur la verticale présenté dans le chapitre 1, dans le cas d'une houle moyenne (hauteur 1.5m, période 10s), d'incidence frontale et oblique ( $10^\circ$ ), à marée haute



(a) photo aérienne



(b) bathymétrie moyenne avec le haut de plage lissé (deux domaines accolés)

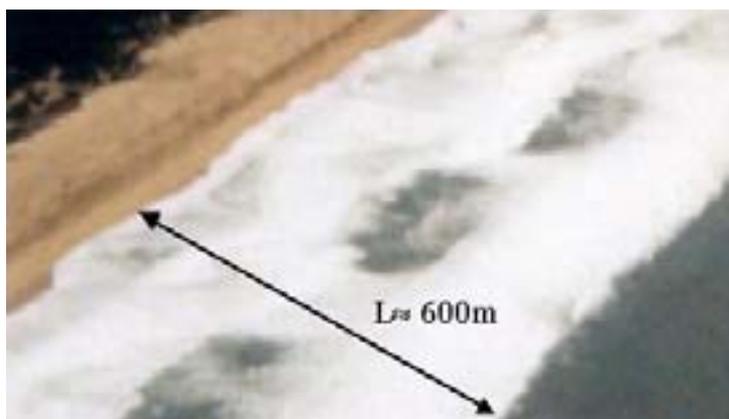
Figure 5.1 : Représentation d'une plage d'Aquitaine avec des barres subtidales en forme de croissant.

puis à marée basse (marnage 5m). Pour limiter l'influence des conditions limites latérales, la houle est calculée sur un domaine large comportant trois longueurs d'onde de la barre subtidale. Les courants, eux, sont calculés sur une seule longueur d'onde avec une condition limite périodique.

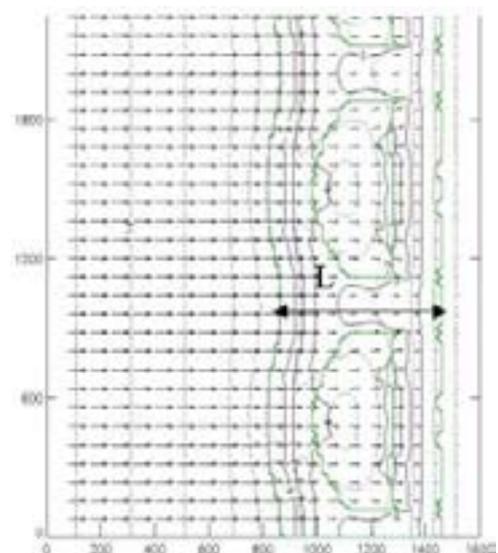
### 5.3.1 Les vagues

#### Validation qualitative pour une houle de tempête

Afin de vérifier que REFDIF décrit bien le comportement de la houle au-dessus de la bathymétrie, on a comparé les résultats numériques aux photos aériennes en notre possession. Les résultats montrent que les sorties du modèle sont qualitativement en accord avec les observations. En particulier, dans le cas d'une houle de tempête, on observe bien que la houle déferle sur les croissants en dissipant la plus grande partie de son énergie, le déferlement s'arrête ensuite dans les fosses de lévigation avant de reprendre jusqu'à la ligne d'eau (figure 5.2).



(a) photo aérienne



(b) simulation REFDIF

Figure 5.2 : Comparaison qualitative de la zone de déferlement pour une houle frontale de hauteur 5m et de période 13s.

### Résultats pour une houle moyenne

On présente les résultats des simulations relatives à une climatologie de vagues assez commune (figure 5.3). Des essais numériques ont permis de montrer que les courants moyens, et en particulier le courant sagittal, étaient trop faibles pour influencer de manière significative la propagation de la houle. On constate que la distribution d'amplitude des vagues est fortement influencée par le niveau de la marée.

A marée haute, les vagues sont amplifiées essentiellement sur le haut de plage, on remarque alors que la ligne de déferlement est presque rectiligne et parallèle à la côte. Toutefois, par réfraction sur les cornes et dans la fosse des croissants, la houle est focalisée au-dessus du pied des croissants.

A marée basse, le phénomène de focalisation est également présent, mais la zone d'amplitude maximale est séparée, de part et d'autre du pied du croissant car le déferlement se produit dès le point haut du croissant. Cette fois, la ligne de déferlement est presque discontinue. De plus, la houle est sensiblement amplifiée par la barre subtidale.

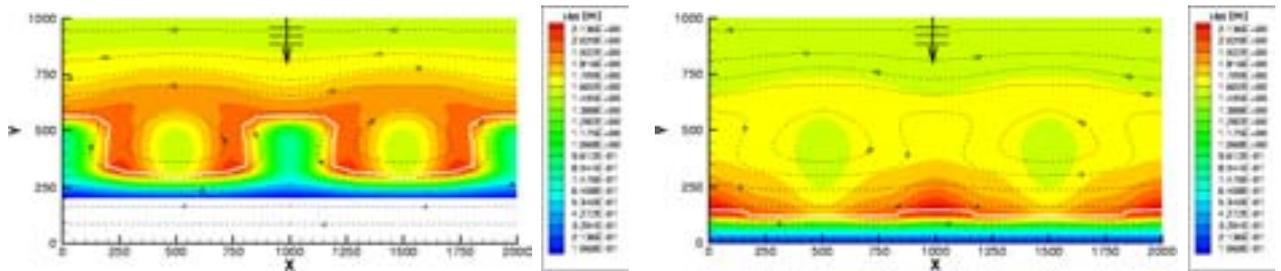
Dans le cas d'une houle oblique, on note que l'effet de focalisation de la houle par les croissants augmente l'amplitude des vagues sur la face externe du pied des croissants la plus exposée à la houle.

Le forçage induit par la houle représente l'effet moteur des vagues sur les courants moyens. Il est déduit du bilan des contraintes de radiation:

$$h\vec{F} = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}\cdot\bar{S}$$

Ce forçage étant essentiellement proportionnel au gradient de l'énergie des vagues, il met clairement en évidence les zones de déferlement et il permet d'en estimer l'intensité. Ainsi, il souligne les déformations du champ de vagues principalement dues à la forme de la bathymétrie (figure 5.4).

Tout comme l'amplitude des vagues, le forçage induit par la houle semble globalement peu sensible à l'incidence de la houle, par contre le niveau du plan d'eau l'influence grandement. En effet, à marée haute le forçage est réparti sur le haut de plage avec une amplification locale au niveau du pied des croissants. A marée basse, par contre, le forçage est discontinu, avec d'une part, une répartition sur le haut de plage en face de la fosse et une amplification locale à côté du pied du croissant, et d'autre part une zone plus au large, sur le point haut du croissant.



(a) marée basse, incidence nulle

(b) marée haute, incidence nulle

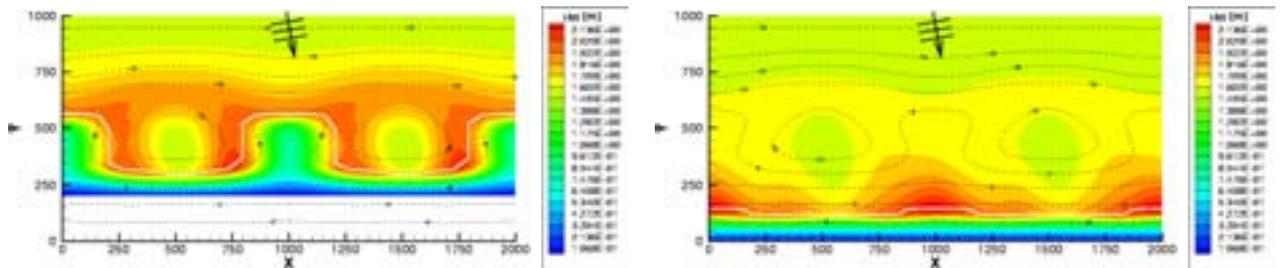
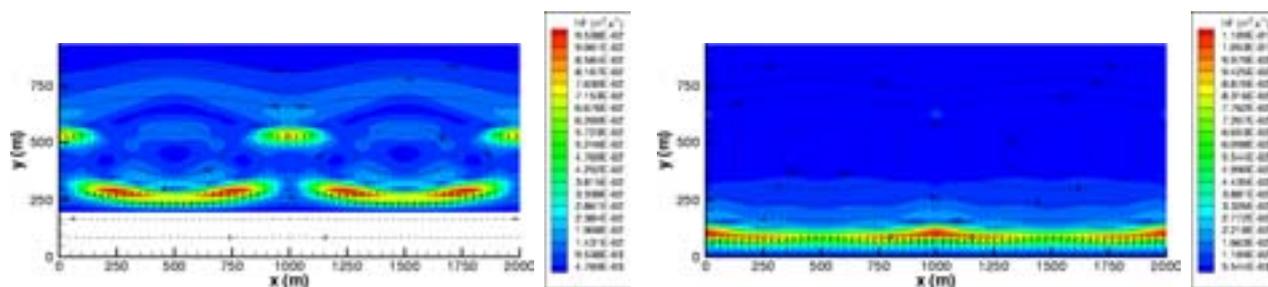
(c) marée basse, incidence  $10^\circ$ (d) marée haute, incidence  $10^\circ$ 

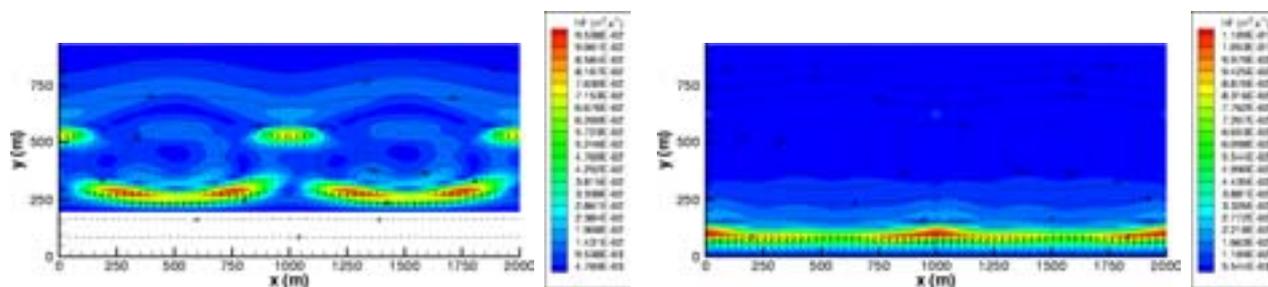
Figure 5.3 : Amplitude moyenne des vagues pour une houle monochromatique au large de hauteur 1.5 m et de période 10 s; la ligne de déferlement est représentée par la ligne blanche.

Ces résultats traduisent les principaux effets de la bathymétrie sur le champ de vagues en fonction du niveau du plan d'eau. La réfraction de la houle engendrée par la fosse conduit à une focalisation des vagues sur le pied du croissant et ses faces externes. En faisant varier continuellement la marée (de la pleine mer à la basse mer), on observerait que les vagues déferlent plus intensément sur le pied du croissant et ses faces externes que sur le haut de plage, jusqu'à ce que le niveau d'eau soit suffisamment bas pour qu'une zone de déferlement distincte migre du haut de plage vers le point haut du croissant.



(a) marée basse, incidence nulle

(b) marée haute, incidence nulle



(c) marée basse, incidence 10°

(d) marée haute, incidence 10°

Figure 5.4 : Illustration du forçage induit par les vagues  $h\vec{F} = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}\cdot\vec{S}$ .

### 5.3.2 Les courants moyens

A marée basse, on observe des courants sagittaux, les masses d'eau vont s'évacuer plus facilement par la fosse de lévigation qui joue un rôle de chenal (figure 5.5a). Cette chenalisation favorise les recirculations du courant  $U_{Mei}$  et les rend assez stables devant le changement d'incidence de la houle, même si on relève la présence d'un courant de dérive sur le haut de plage (figure 5.5c). A marée haute, la houle oblique déferle dans la zone intertidale plane et induit un courant de dérive plus homogène mais légèrement oscillant (figure 5.5d). En effet, les recirculations du courant  $\vec{U}_{Mei}$  que l'on observe pour une houle frontale (figure 5.5b) dégènerent en oscillations en présence d'une houle oblique.

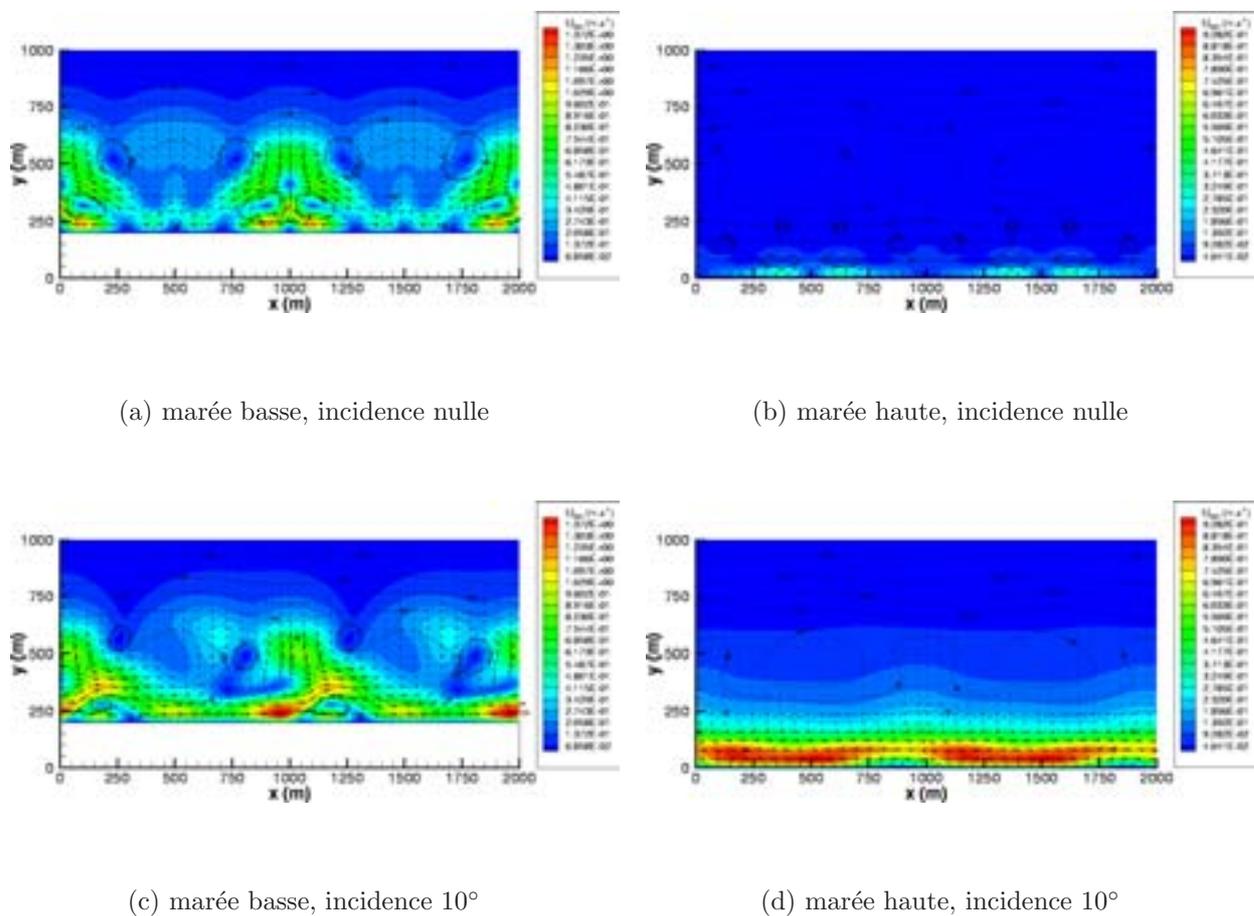
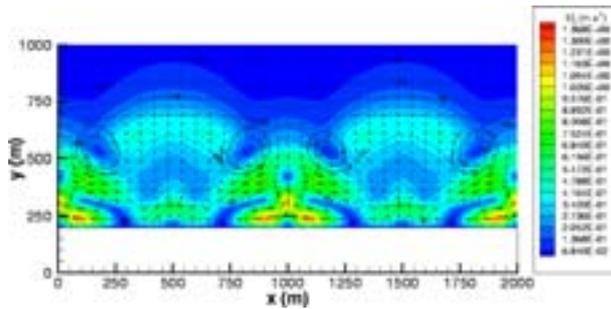


Figure 5.5 : Champ de courant au sens de  $Mei$  ( $\vec{U}_{Mei}$ ); les lignes de courants sont représentées en noir.

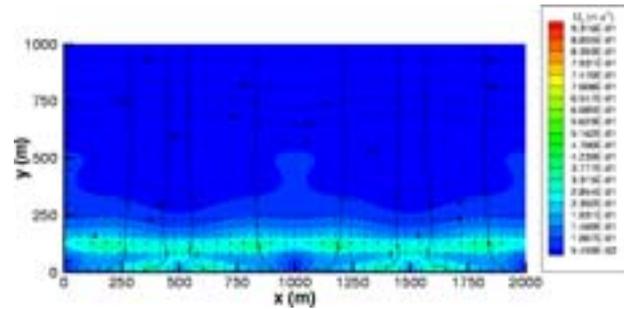
Pour prendre en compte l'apport de masse par les vagues, et obtenir les courants

moyens, on superpose le courant de compensation ( $\vec{U} = -\frac{\vec{Q}}{h}$ ) au courant  $\vec{U}_{Mei}$  (relation (1.30) au chapitre 1). On obtient alors un courant de retour, dirigé vers le large, présent tout au long de la marée et prédominant lorsque la houle est frontale. L'omniprésence de ce courant permet d'expliquer l'amplification locale du courant moyen  $\vec{U}$  dans les zones où le courant  $\vec{U}_{Mei}$  est dirigé vers le large. Par exemple, à marée haute on observe des pics d'intensité du courant moyen (figures 5.6b et 5.6d). De même à marée basse, on observe un pic de courant moyen sur le haut de plage et une amplification du courant sagittal sur le croissant à la sortie de la fosse de lévigation (figures 5.6a et 5.6c). Quel que soit le niveau de la marée, les courants moyens pour une houle oblique sont plus intenses que pour une houle frontale, ceci est confirmé par les premiers résultats expérimentaux de la campagne d'octobre 2001 du PNEC.

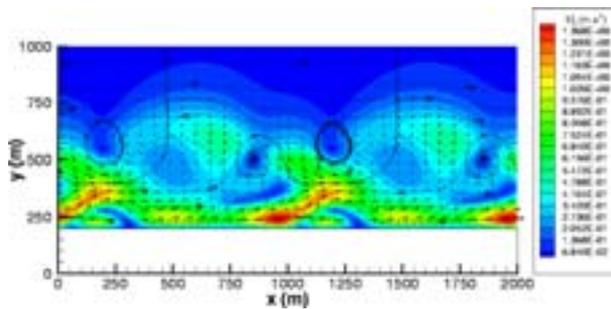
On a ainsi établi des premiers résultats numériques concernant la structure et l'ordre de grandeur des courants induits par les vagues au-dessus des barres en croissant. En plus de la présence des courants classiquement observés sur des plages planes (courant de retour, courant de dérive), la focalisation de la houle sur les points hauts de la bathymétrie et la présence d'une fosse de lévigation stabilisent les recirculations du courant et créent des courants sagittaux. Ainsi, ces résultats mettent en évidence que l'intensité et la localisation des zones de déferlement déterminent la structure des courants. De ce fait, l'hydrodynamique sur des plages complexes dépend fortement de la hauteur du plan d'eau. Ces résultats sont en cours de validation grâce aux données expérimentales de la campagne PNEC-ART7.



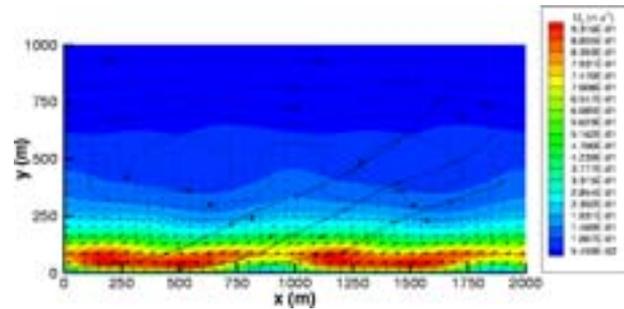
(a) marée basse, incidence nulle



(b) marée haute, incidence nulle



(c) marée basse, incidence 10°



(d) marée haute, incidence 10°

Figure 5.6 : Champ de courant moyen ( $\vec{U} = \vec{U}_c$ ) obtenu par la superposition du courant  $\vec{U}_{Mei}$  et du courant de compensation dû aux vagues  $\vec{U}$ .

## 5.4 Evolution de la bathymétrie

Une fois les courants moyens forcés par les vagues obtenus, on détermine le transport sédimentaire sur la plage à partir de la formule de Bailard (2.3) définie dans le chapitre 2. Le bilan des flux sédimentaires permet alors de distinguer les zones d'érosion et d'accrétion initiales. L'évolution du fond est calculée avec un pas de temps sédimentaire d'une heure.

Ici, dans le cadre de ces premières investigations sur la morphodynamique des plages d'Aquitaine, le couplage hydro-sédimentaire s'effectue principalement entre le module de courant moyen et le module sédimentaire, car le forçage induit par les vagues n'est pas réactualisé après l'évolution du fond, on impose uniquement celui calculé sur la bathymétrie initiale pour un niveau de la marée donné (figure 5.7). Ces considérations permettent d'obtenir une partie des rétroactions non-linéaires entre l'hydrodynamique et l'évolution du fond, en écartant toutefois celles liées à l'évolution du champ de vagues en fonction de la bathymétrie. Par conséquent, les résultats sur l'évolution morphologique du fond restent admissibles tant que la perturbation du fond est suffisamment faible pour ne pas modifier de façon sensible le forçage induit par la houle.

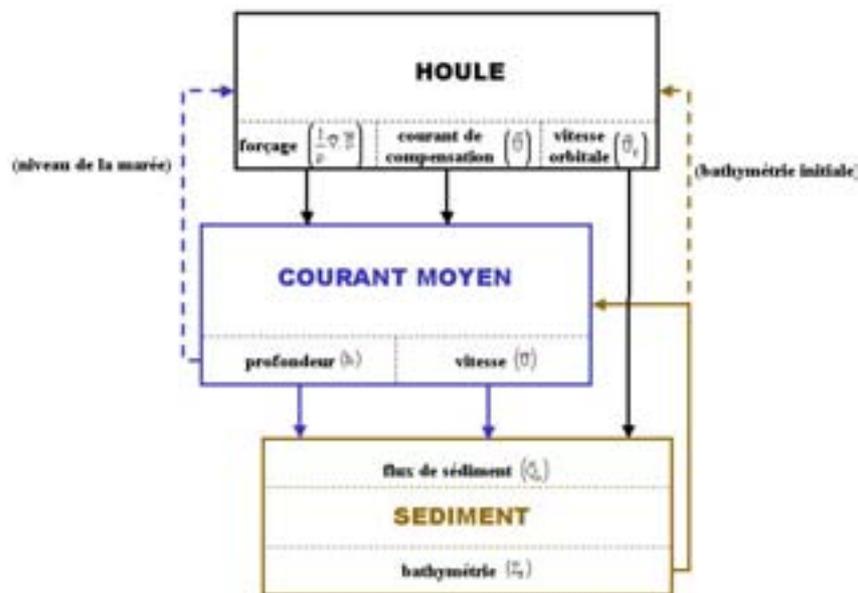


Figure 5.7 : Schéma des couplages morphodynamiques réalisés.

Sur les durées simulées (une dizaine d'heures), le comportement morphodynamique de la plage est très peu advectif. La méthode numérique NOCS utilisée ici pour résoudre l'équation de conservation du sédiment n'est donc pas indispensable, et une simple dis-

crétisation centrée pourrait fournir des résultats satisfaisants.

Le critère de stationnarité des courants moyens retenu pour toutes les simulations morphodynamiques présentées dans cette partie est  $C_s = 10^{-2}$ . La figure 5.8 présente un exemple typique de l'évolution du critère  $C_s$  en fonction du nombre d'itérations effectuées. Dès que le critère est atteint, les flux de sédiment sont calculés et une nouvelle bathymétrie est déduite, ensuite les courants doivent être re-calculés. On constate alors que la phase d'initialisation des courants moyens nécessite trois fois plus d'itérations que les phases de rétroaction fond-courant qui suivent.

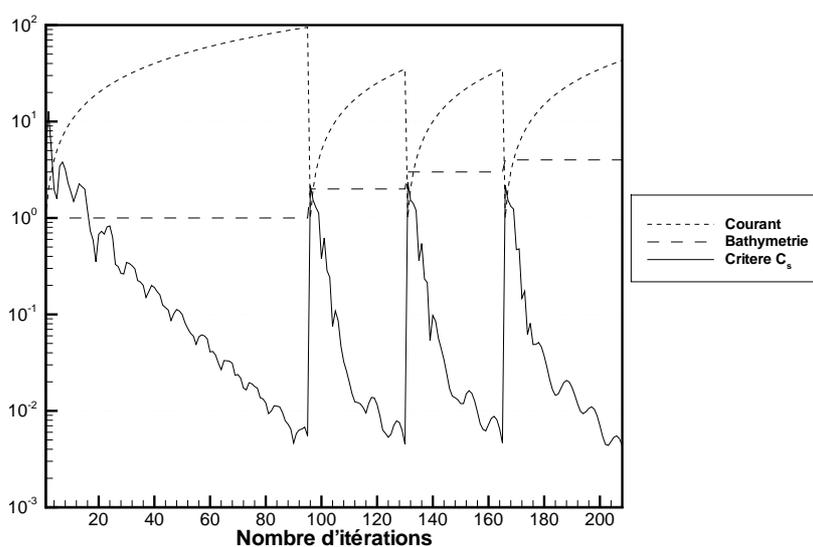


Figure 5.8 : Evolution du critère de stationnarité des courants moyens  $C_s$  en fonction du nombre d'itérations. Le nombre d'itérations effectué par le modèle de courant et par le modèle d'évolution du fond est également représenté. Cette situation correspond à la morphodynamique de la plage pendant 4 heures, à marée basse et par houle frontale.

### 5.4.1 Transport sédimentaire

#### Distribution des flux sédimentaires

On constate que le flux de sédiment est fortement corrélé au courant moyen, sauf au voisinage de la ligne d'eau où il est très faible.

À marée haute, on observe une répartition "en bande" des flux de sable sur le haut de plage. De plus, des points de focalisation apparaissent très nettement de part et d'autre des pieds des croissants (figure 5.9b) et 5.9d). La dérive littorale est bien représentée lorsque la houle est oblique.

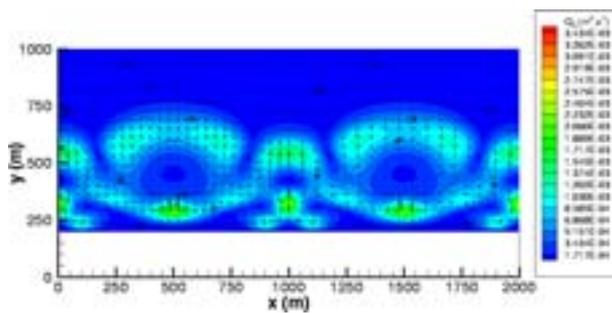
À marée basse, le transport sédimentaire distribué sur la barre subtidale et le pourtour de la fosse est essentiellement dirigé vers le large, tandis que les flux de sédiment répartis sur le point haut des croissants sont dirigés vers la plage (figures 5.9a et 5.9c). Comme à marée haute, une petite zone de focalisation centrale apparaît sur le haut de plage par houle frontale. Cependant, elle disparaît lorsque la houle est oblique, au profit d'un point de focalisation beaucoup plus intense sur la face externe des pieds de croissants sous la houle.

Les figures 5.10 et 5.11 mettent en évidence que le transport en suspension est largement majoritaire par rapport au charriage (un ordre de grandeur au-dessus). De même, les figures 5.12 et 5.13 montrent que la contribution de l'effet de pente à chacun de ces modes de transport est faible (un ordre de grandeur en-dessous). Par contre, la répartition spatiale des flux de sédiment est sensiblement identique entre chaque mode de transport.

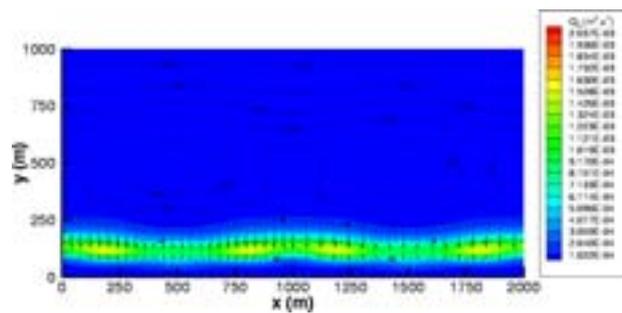
Enfin, on constate que le transport sédimentaire est majoritairement dirigé vers le large. Une des raisons de cette direction privilégiée repose sur la modélisation de la vitesse de frottement sur le fond. Les flux de sédiment estimés par la formule de transport (2.3) sont basés sur une formulation simple de la vitesse de frottement (2.4) mais inadaptée pour prendre en compte l'asymétrie de la houle. Une meilleure description du courant dans la zone de surf est souhaitée par Roelvink et al. (1989), [107], pour prendre en compte le caractère non-instantané de la réponse du sédiment aux sollicitations de l'écoulement. La modélisation (2.5) propose une alternative pour représenter plus finement cette vitesse et pour exploiter davantage le potentiel de la formule de Bailard.

Néanmoins, même à partir d'une vitesse de frottement "réelle" (relevée par des courantomètres électromagnétiques), des difficultés persistent pour simuler le transport sédimentaire. Thorton et Humiston (1996), [138], ont montré que la formule de Bailard permet

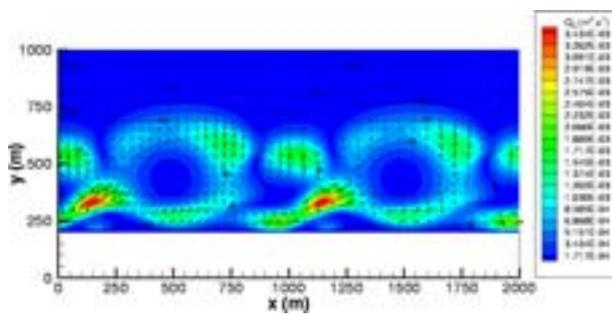
bien de reproduire les bilans sédimentaires principaux et les mouvements des bancs de sable en période de tempête, mais pas le creusement des fosses de lévigation observé lors de petites conditions de vagues. De même, Gallagher et al. (1998), [55], reportent les difficultés de prédiction de la lente migration des barres vers le haut de plage lorsque les vagues sont peu énergétiques. La formule de Bailard mérite donc des adaptations pour mieux répondre aux problèmes de dynamique sédimentaire en milieu littoral.



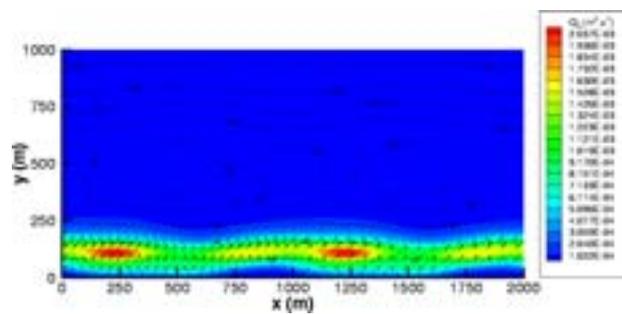
(a) marée basse, incidence nulle



(b) marée haute, incidence nulle

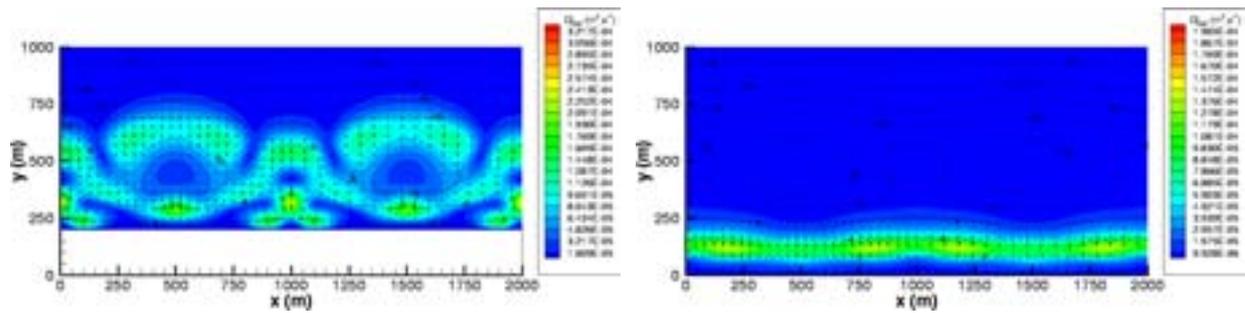


(c) marée basse, incidence 10°



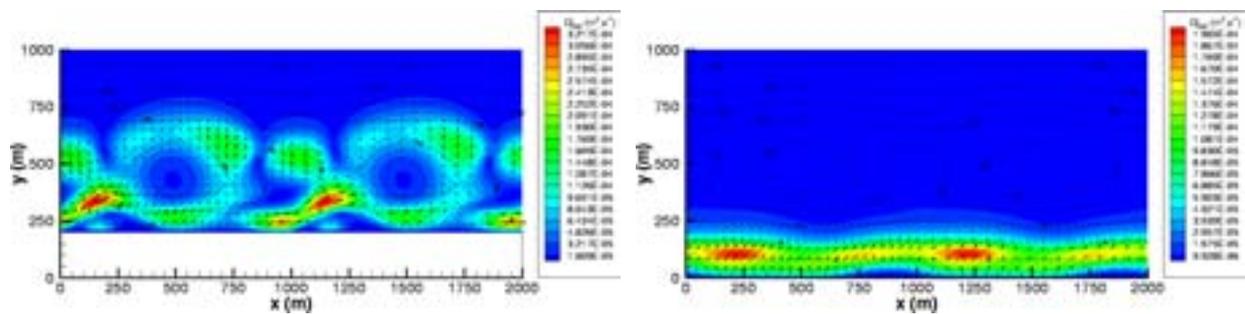
(d) marée haute, incidence 10°

Figure 5.9 : Flux de sédiment total ( $\vec{Q}_t$ ) transporté selon la formule de Bailard (1981).



(a) marée basse, incidence nulle

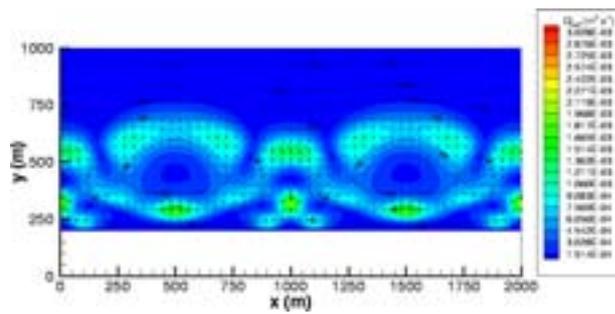
(b) marée haute, incidence nulle



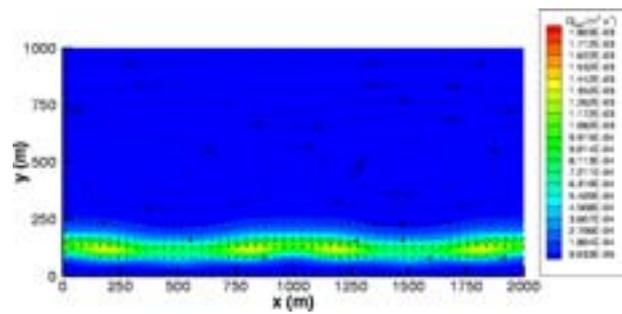
(c) marée basse, incidence 10°

(d) marée haute, incidence 10°

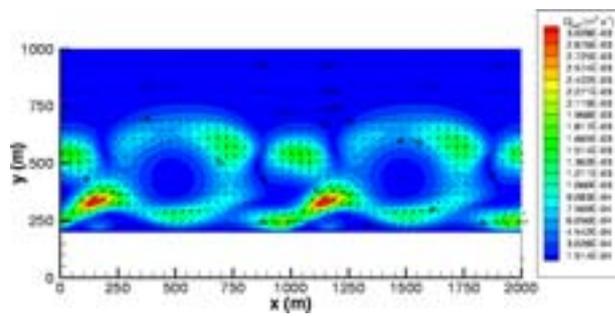
Figure 5.10 : Contribution au flux de sédiment transporté par charriage ( $\vec{Q}_{b0}$ ) selon la formule de Bailard (1981).



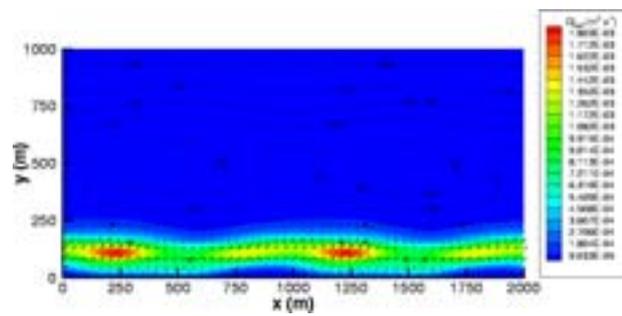
(a) marée basse, incidence nulle



(b) marée haute, incidence nulle

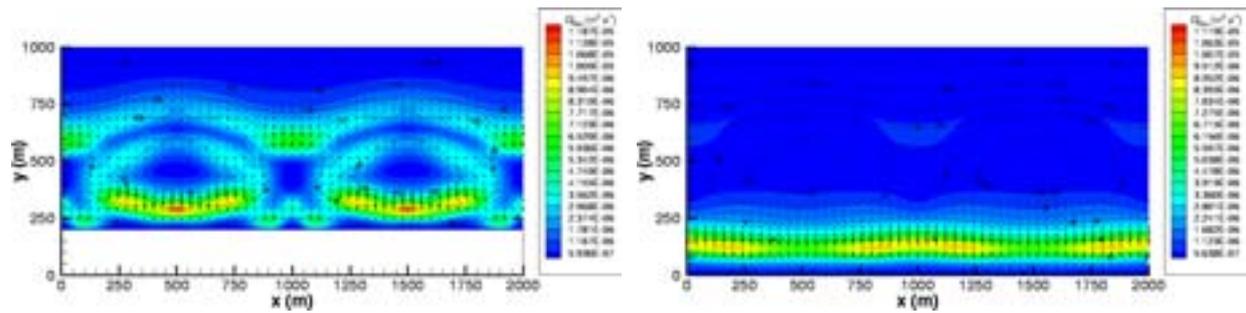


(c) marée basse, incidence 10°



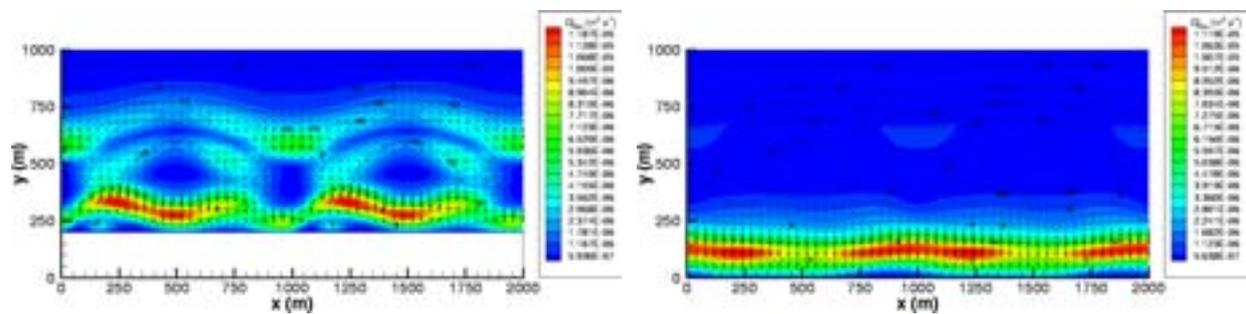
(d) marée haute, incidence 10°

Figure 5.11 : Contribution au flux de sédiment en suspension ( $\vec{Q}_{s0}$ ) selon la formule de Bailard (1981).



(a) marée basse, incidence nulle

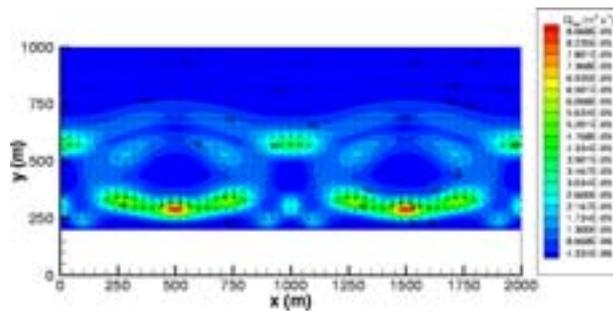
(b) marée haute, incidence nulle



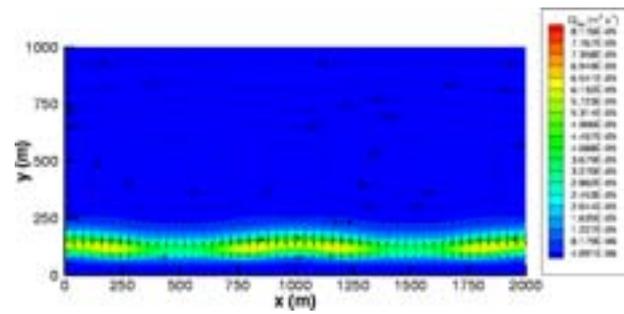
(c) marée basse, incidence 10°

(d) marée haute, incidence 10°

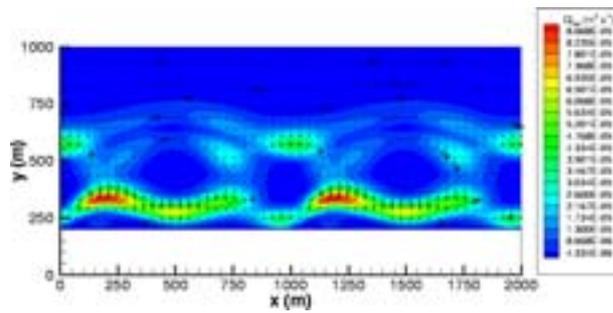
Figure 5.12 : Contribution au flux de sédiment charrié par effet de pente ( $\vec{Q}_{bs}$ ) selon la formule de Bailard (1981).



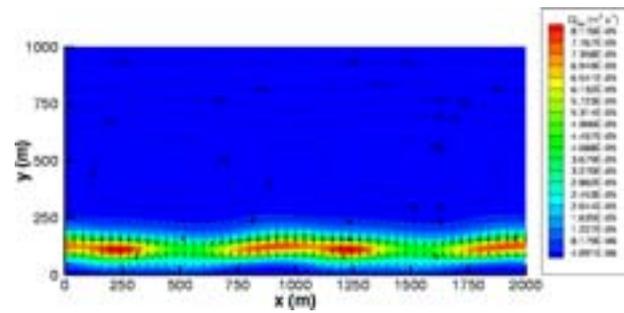
(a) marée basse, incidence nulle



(b) marée haute, incidence nulle



(c) marée basse, incidence 10°



(d) marée haute, incidence 10°

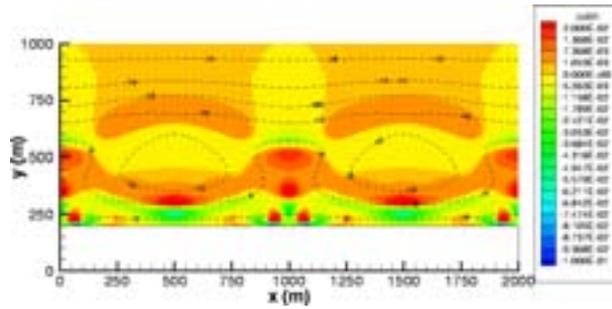
Figure 5.13 : Contribution au flux de sédiment en suspension due à l'effet de pente ( $\vec{Q}_{ss}$ ) selon la formule de Bailard (1981).

### Identification des zones d'érosion et de dépôt

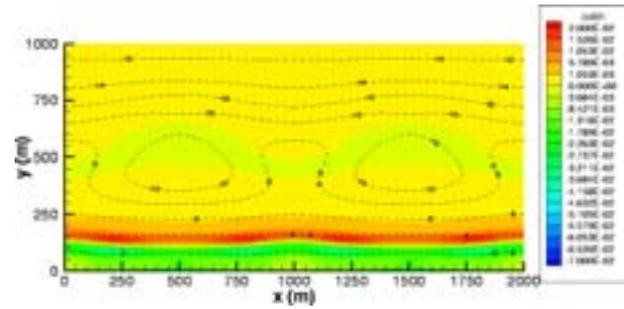
Les zones d'érosion et de dépôt sur la plage peuvent être déduites du bilan des flux de sédiment. Sur la figure 5.14, on montre en particulier l'intensité du remaniement sédimentaire relatif à la hauteur d'eau.

Le haut de plage (zone de déferlement) est une zone particulièrement active, quel que soit le niveau du plan d'eau. Ainsi, une bande d'érosion au voisinage de la ligne d'eau est "compensée" par une zone d'accrétion parallèle un peu plus au large. Dans ce cas, la "ligne" du forçage maximum induit par les vagues (figure 5.4) semble matérialiser la "ligne" d'inflexion entre ces zones. On retrouve des localisations similaires entre les zones de remaniement important et celles où les flux de sédiment sont particulièrement intenses. Par contre, dans les zones où les flux de sédiment sont faibles, comme par exemple à la ligne d'eau, on observe une alternance entre des zones d'érosion et les zones d'accrétion. A marée basse, ce phénomène est particulièrement bien marqué, les faces exposées à la houle des pieds de croissant sont en accrétion alors que les faces sous la houle sont érodées.

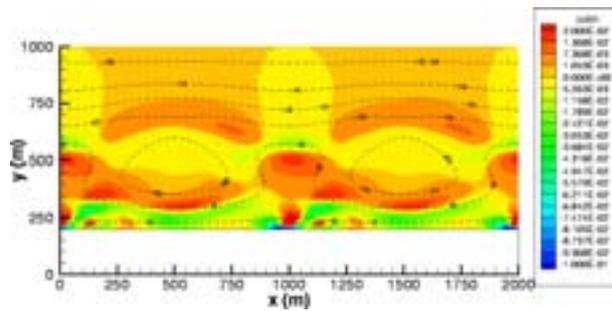
En ce qui concerne les zones plus profondes, à marée haute, la barre subtidale n'est pas du tout concernée par le remaniement. En revanche, à marée basse, elle est sollicitée. La face exposée à la houle est en accrétion tandis que celle orientée vers la fosse est érodée. Inversement, dans la zone du point haut du croissant, la face exposée à la houle est légèrement érodée alors qu'une grande partie du pied du croissant est en accrétion. Ces résultats montrent que le croissant forme une barre subtidale avec des pieds de connexion à la plage stable et entretenue à marée basse. De plus le haut de plage est façonné pour former une barre de déferlement non homogène.



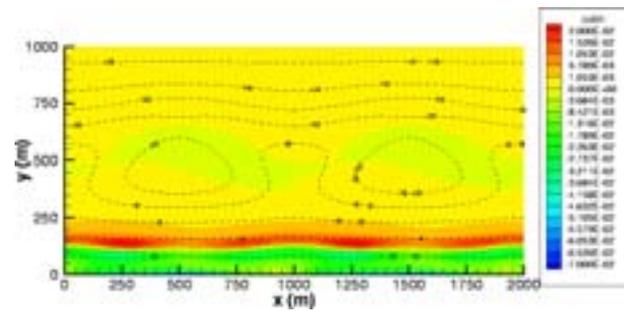
(a) marée basse, incidence nulle



(b) marée haute, incidence nulle



(c) marée basse, incidence 10°



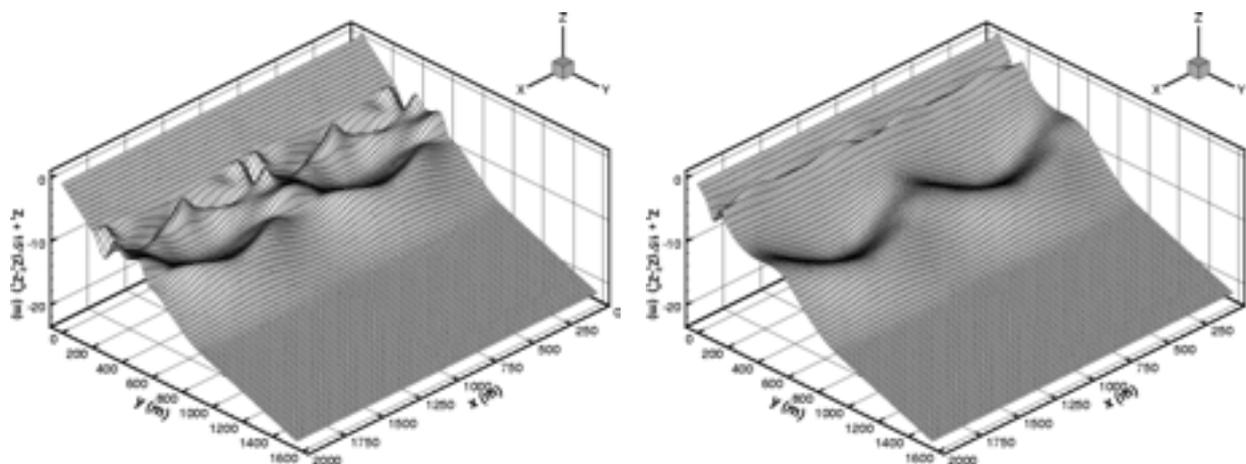
(d) marée haute, incidence 10°

Figure 5.14 : Mise en évidence de l'intensité du remaniement initial relatif à la profondeur  $\left(\frac{Z_f^1 - Z_f^0}{h}\right)$ ; zones de dépôt (rouge) et d'érosion (bleu).

### 5.4.2 Evolution de la plage pour des niveaux du plan d'eau fixés

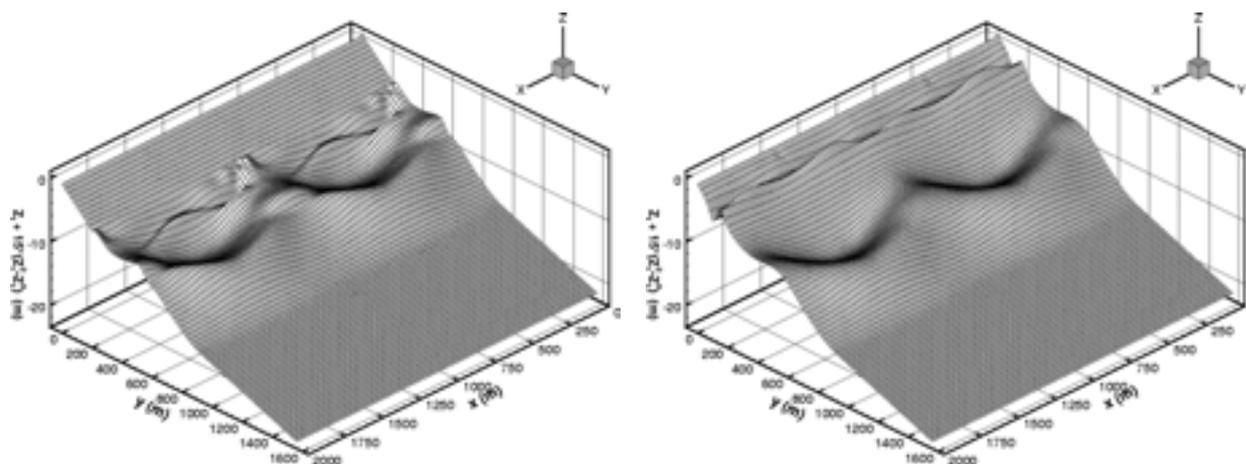
Sur la figure 5.15, on illustre la bathymétrie obtenue après une évolution morphodynamique de 6 heures pour un niveau du plan d'eau fixé. On met ainsi en évidence la formation "rapide" d'une barre de déferlement sur le haut de plage dans chacun des cas. Cette barre présente une variabilité longitudinale particulièrement marquée à marée basse car le phénomène de réfraction de la houle est plus important dans cette situation.

On rappelle que (le module de houle n'étant pas encore intégré dans le code de simulation) le forçage induit par la houle sur les courants moyens est basé uniquement sur la bathymétrie initiale et qu'il n'est pas remis à jour au cours de la simulation morphodynamique. Par conséquent, les hétérogénéités sur la hauteur de la barre de déferlement pourraient être amplifiées par une accrétion supplémentaire due à l'intensification locale du déferlement et une érosion plus intense au niveau des chenaux de vidange.



(a) marée basse, incidence nulle

(b) marée haute, incidence nulle



(c) marée basse, incidence 10°

(d) marée haute, incidence 10°

Figure 5.15 : Evolution morphologique de la bathymétrie après 2 heures consécutives pour un niveau de la marée fixé. Pour mieux visualiser les changements du fond, l'amplitude des déformations de la bathymétrie est multipliée par un facteur 15. Cet artifice permet également d'estimer très grossièrement (une évolution linéaire dans les mêmes conditions) la forme de la plage après 30 heures.

### 5.4.3 Evolution de la plage en présence de la marée

Les simulations menées pour un niveau du plan d'eau fixé mettent en évidence, de manière qualitative, le rôle essentiel des barres en croissant sur la dynamique des plages et le potentiel important des outils de simulations développés. C'est pourquoi, pour aller un peu plus loin et obtenir une vision plus réaliste de la morphodynamique des plages en Aquitaine, on a souhaité simuler l'évolution de la plage sur quelques heures en prenant en compte un cycle de marée simplifié.

On considère une marée de profil sinusoidal, avec un marnage de 5 m et une période de 12 h. Le forçage des courants moyens induits par la houle est à nouveau déterminé sur la bathymétrie initiale, mais pour des niveaux d'eau échantillonnés toutes les heures, sur un demi-cycle de marée, depuis la marée basse jusqu'à la marée haute (figure 5.16). Pour connaître le forçage induit par les vagues après 6 h de simulation, on se reporte au forçage estimé pour un même niveau d'eau sur le demi-cycle de marée de référence.

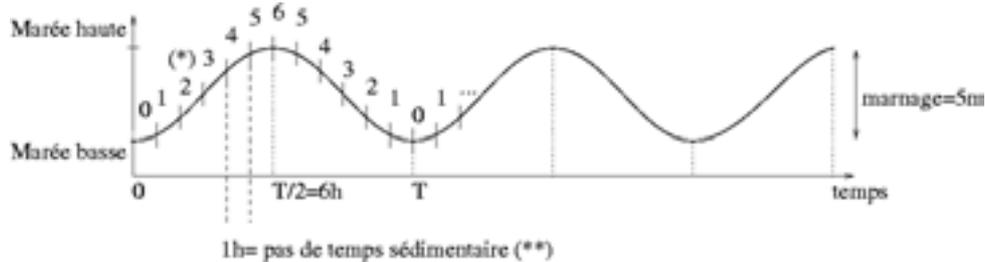


Figure 5.16 : Echantillonnage de la marée simplifiée sur une demi-période. (\*) Le forçage induit par la houle est calculé toutes les heures par rapport à la bathymétrie initiale. (\*\*) Les courants moyens sont recalculés à chaque pas sédimentaire sur la "nouvelle" bathymétrie.

Ici, on présente les résultats de la morphodynamique sédimentaire d'une plage pendant 30 heures consécutives (5 demi-cycles de marée), pour la houle frontale. On remarque que la plage se déforme globalement aux mêmes endroits que dans les cas précédents où le niveau d'eau restait constant. On observe ainsi la formation simultanée de deux barres de déferlement. Par rapport au cas de marée haute présenté avant, la barre est ici moins marquée et plus diffuse. Le haut de plage étant balayé par la marée, cette barre n'est entretenue que lorsque le niveau d'eau est voisin de la marée haute. D'autre part, une barre en face de la fosse est également entretenue par la marée basse.

En absence de rétroaction du champ de vagues avec l'évolution de la bathymétrie, on en déduit que la situation de marée haute et de marée basse sont peu dépendantes, et que seule une action locale et prolongée de la houle et des courants moyens sur la plage peut introduire des modifications sensibles de la bathymétrie. La marée régule donc "simplement" le temps de remaniement des sédiments dans la zone de déferlement. De ce fait, et à condition de pondérer le taux de croissance des corps sédimentaires obtenu pour un niveau de plan d'eau fixe, la superposition des situations de marée haute et de marée basse peut être représentative de l'évolution morphodynamique globale de la plage.

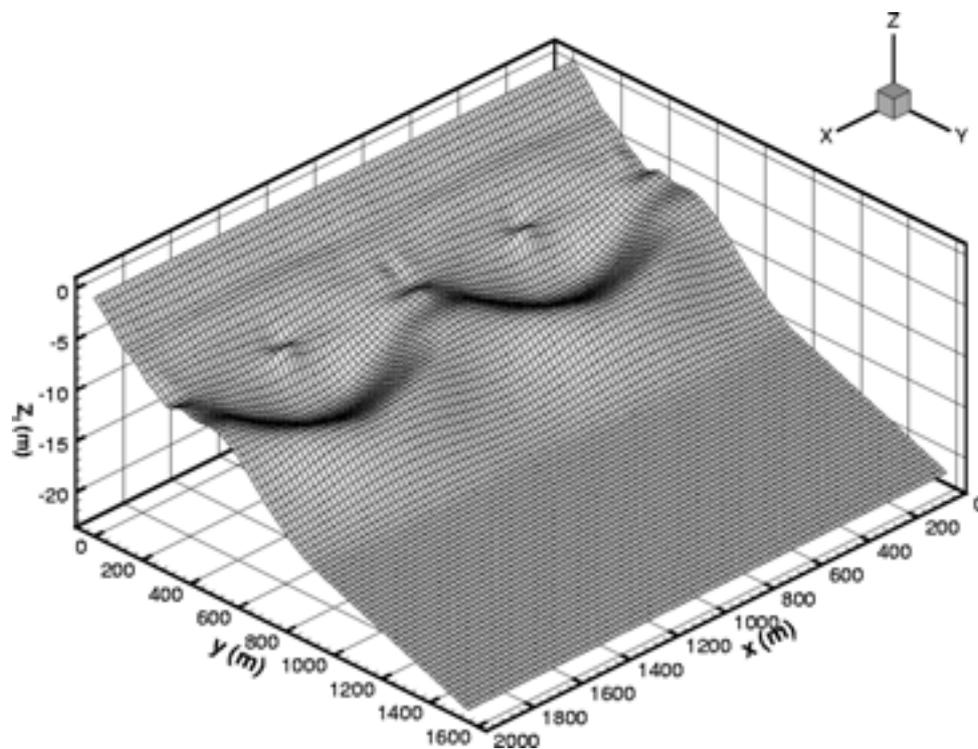


Figure 5.17 : Evolution morphologique de la plage après 30 heures consécutives avec la prise en compte d'une marée "idéalisée" (profil sinusoïdal, période 12 h, marnage 5 m) et d'une houle frontale (hauteur 1.5 m, période 13 s).

## 5.5 Conclusion

Ces simulations appliquées au littoral Aquitain montrent que l'évolution morphologique de la plage est fortement contrôlée par la position de la zone de déferlement des vagues. La focalisation de la houle par le relief sous-marin, telle que les barres en croissant, favorise une amplification locale du remaniement sédimentaire. Ainsi, les situations de l'écoulement à marée haute et à marée basse déterminent largement la position des principaux bancs de sable qui apparaissent sur la plage. Enfin, la marée, en agissant sur le niveau du plan d'eau, joue alors un rôle de temporisation dans la croissance des corps sableux.

# Conclusion générale

## Bilan des travaux

Ces travaux de recherche réalisés en collaboration avec le laboratoire MASTER-ENSCPB et le Département de Géologie et d'Océanographie à l'université de Bordeaux 1, ont permis de représenter la morphodynamique sédimentaire des bancs de sable en milieu côtier. Sur la base d'observation, on a modélisé mathématiquement les courants moyens induits par la houle et la dynamique sédimentaire avant de proposer des méthodes numériques adaptées à la résolution de chaque modèle. Cela a permis de construire entièrement un outil de simulation numérique du couplage hydro-sédimentaire à moyenne échelle : MORPHODYN.

La houle joue un rôle prépondérant sur la dynamique des écoulements côtiers. Les vagues sont le moteur des courants moyens par l'intermédiaire des tensions de radiation. Elles modifient également la résistance de l'écoulement sur le fond par leur mouvement d'oscillation. Elles participent aussi à la mise en mouvement du sable à cause des fortes vitesses orbitales et les rides de sable qu'elles génèrent sur le fond. Le champ de vagues sur des bathymétries complexes est simulé par REFDIF, mais il est nécessaire de filtrer les quelques instabilités numériques qui se développent au niveau du déferlement.

L'intégration du mouvement de l'eau sur la verticale et sur la période des vagues permet de représenter l'hydrodynamique côtière moyenne en milieu peu profond. Les courants moyens résultent de l'équilibre entre les forces de pression hydrostatique, les forces induites par la houle, les forces de frottement sur le fond et les forces de dissipation générées lors du cisaillement de l'écoulement. La connaissance de cet équilibre est fondamentale pour décrire la véritable influence de la bathymétrie sur la dynamique sédimentaire. La solution des courants moyens est obtenue par la discrétisation implicite d'une méthode de couplage

numérique originale.

On peut toujours s'interroger sur la validité et les limites du modèle hydrodynamique ou sur la précision et l'efficacité des méthodes utilisées pour le résoudre numériquement, mais en ce qui concerne la modélisation du transport sédimentaire, les approches utilisées n'ont pas toutes une base commune et elles reposent encore largement sur des formulations empiriques. Cela explique en partie les difficultés pour estimer les flux de sédiment en fonction des modèles hydrodynamiques moyens.

L'évolution des corps sédimentaires est déduite du bilan des flux de sédiment, en résolvant la loi de conservation du sédiment. Dans des situations simples dominées par le courant, la décomposition des flux de sédiment en fonction des variables hydrodynamiques permet de montrer que la morphodynamique des bancs de sable est contrôlée par un mécanisme d'advection non-linéaire et également des phénomènes diffusifs dus à la divergence des lignes de courant. La nature hyperbolique de la loi de conservation du sédiment étant ainsi mise en évidence, cela impose l'utilisation de méthodes d'intégrations numériques spécifiques pour la résoudre. Le modèle des ondes de sable soulève l'importance d'une bonne estimation de la vitesse caractéristique d'advection, que ce soit pour la bonne interprétation physique du modèle ou pour l'optimisation de la correction numérique dans le schéma d'advection TVD. Pour lever ces difficultés et intégrer directement la loi de conservation du sédiment, quelle que soit la complexité de l'écoulement combinant houle et courant, on propose d'utiliser la méthode NOCS.

La simulation numérique du couplage hydro-sédimentaire est appliquée à différentes situations, à des fins de validation du modèle, ou pour des applications aux écoulements réels. Le modèle MORPHODYN a été spécialement conçu pour étudier la dynamique des plages de sable soumises à l'action de la houle, et c'est pourquoi cet outil est exploité pour approfondir les connaissances empiriques et expérimentales sur la morphodynamique sédimentaire du littoral aquitain.

Les barres subtidales en forme de croissant, en fonction du niveau de la marée, focalisent l'énergie des vagues et contrôlent la localisation du déferlement. De ce fait, les courants moyens forcés par la houle engendrent une dynamique sédimentaire sensible à l'incidence de la houle, et favorisent globalement l'apparition des barres intertidales rappelant les systèmes de barres et de baïnes observés le long de la plage.

---

## Perspectives de recherche

Désormais, on dispose d'un outil numérique performant dédié aux investigations sur les écoulements hydro-sédimentaire en milieu littoral. Le modèle de houle a été comparé qualitativement avec des photos aériennes, mais il est indispensable de comparer ces résultats numériques avec les relevés sur le terrain. De même, il faut étudier précisément la sensibilité du modèle hydrodynamique à la paramétrisation du coefficient de frottement sur le fond et celle du coefficient de mélange de la quantité de mouvement. Ces deux paramètres contrôlent de façon déterminante l'allure des courants moyens, c'est pourquoi ils sont à recalibrer en fonction des résultats de l'analyse des courantomètres.

En terme de modélisation, le forçage induit par la houle peut être complété pour prendre en compte plus finement les effets des déferlantes (*roller*). D'autre part, le coefficient de mélange de la quantité de mouvement utilisé pour paramétrer la dissipation latérale pourrait également être calculé avec un modèle de simulation des grandes échelles (LES) pour analyser l'énergie des structures tourbillonnaires et leur impact sur le transport sédimentaire moyen.

Du point de vue numérique, on peut également gagner beaucoup de temps de calcul en montrant que la solution stationnaire des courants moyens converge même si on limite la précision sur le résidu de la méthode à chaque itération. Une analyse de stabilité de Von Neumann appliquée au schéma numérique général permettrait également de déterminer la matrice d'amplification de la méthode et d'en déduire le taux de convergence stationnaire optimale. De plus, le couplage du modèle avec une méthode de résolution multigrille AMR permettrait de s'affranchir de certaines difficultés de résolution au voisinage de la ligne d'eau. De même, l'utilisation de la méthode NOCS avec la stratégie multigrille permettrait de résoudre ses problèmes de diffusion. La pénalisation tensorielle devrait également permettre de mieux gérer les zones couvrantes et découvrantes de la bathymétrie lors de la propagation de la marée.

Enfin, comme la transformation de la houle dans la zone de déferlement joue un rôle important dans la dynamique sédimentaire littorale, les développements menés actuellement au laboratoire MASTER autour de la simulation directe du déferlement des vagues (en 3D) permettront d'accéder à des échelles spatio-temporelles plus petites que celle traitée dans cette thèse. Ces simulations devront permettre d'analyser le transport sédimentaire à l'échelle de la vague, et de proposer des paramétrisations plus performantes pour les modèles 2D intégrés verticalement et moyennés dans le temps.

## Motivations

La simulation numérique constitue un outil d'aide à la décision pour mieux gérer les risques écologiques et optimiser les choix économiques. En ce sens, une expertise dans le domaine de la modélisation numérique se révèle indispensable. De ce fait, seules des véritables collaborations interdisciplinaires et coordonnées permettront de faire avancer significativement les connaissances sur l'environnement littoral et d'améliorer la qualité des prévisions de son évolution.

# Annexe A

## Ondes longues

Les ondes longues ont une période de l'ordre de 100  $s$  et une longueur d'onde de l'ordre de 100  $m$ . On peut distinguer les ondes infragravitaires induites par la modulation de l'amplitude des vagues et les ondes "très" infragravitaires générées par le cisaillement des courants moyens.

### A.1 Ondes infragravitaires

Par exemple, sur la figure (A.1), Symonds et al. (1982), [131], décrivent la génération des ondes infragravitaires par le déplacement de la ligne de déferlement au cours du temps (*surf-beat*). Ces ondes sont directement associées aux vagues, car un train de vagues irrégulier forme une onde de groupe qui génère un battement du niveau moyen de la surface libre. La figure (A.2) illustre la contribution des ondes longues au transport sédimentaire en suspension. Deigaard et al. (1999b), [41], ont montré que cette contribution est opposée au transport par les vagues lorsque celui-ci est faible. D'après Vittori et al. (1999), [144], ce mécanisme de transport par les ondes infragravitaires pourrait expliquer la formation des barres subtidales en croissant.

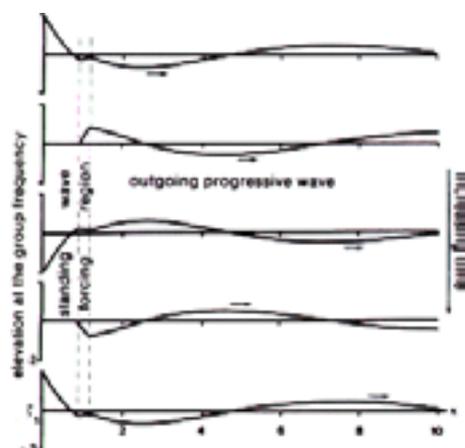


Figure A.1 : Mouvement d'une onde infragravitaire sur une plage plane; selon Symonds et al. (1982), [131].

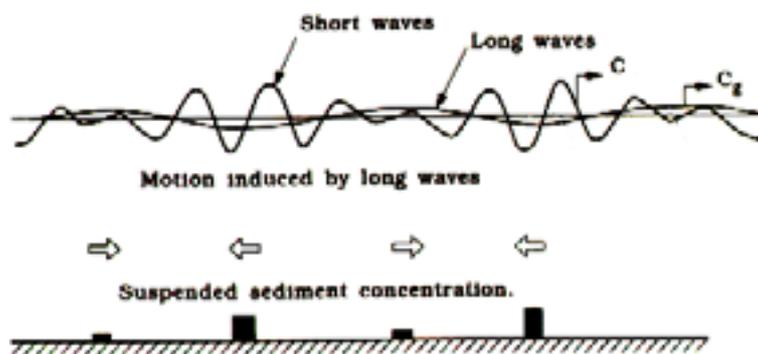


Figure A.2 : Mécanisme de transport sédimentaire sous une onde infragravitaire; selon Deigaard et al. (1999b), [41].

## A.2 Instabilités du courant longitudinal

Un autre type d'ondes longues a été mis en évidence par Oltman-Shay et al. (1989), [97], il s'agit des ondes "très" infragravitaires induites par les instabilités du courant de dérive. A partir d'un modèle de courant moyen en milieu peu profond forcé par la houle, un modèle de frottement linéaire ( $\vec{\tau}_f = \rho\mu\vec{U}$ ) et une faible dissipation biharmonique, Allen et al. (1996), [2], Slinn et al. (1998), [119], ont montré que les instabilités du courant longitudinal sur une plage à barre sont majoritairement contrôlées par le coefficient de frottement sur le fond. Ces résultats, illustrés sur les figures (A.3) et (A.4), montrent la possible existence dans la zone de surf d'une dynamique tourbillonnaire assez énergétiques associée aux instabilités du courant longitudinal. Il reste à déterminer l'impact de ces instabilités du courant de dérive sur le transport sédimentaire.

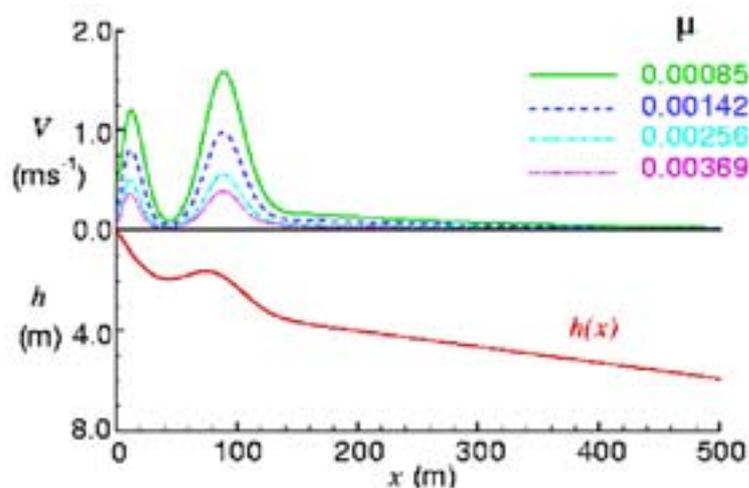


Figure A.3 : Profil de la plage et du courant de dérive d'après le modèle de houle de Thornton et Guza (1986), [137]; selon Slinn et al. (1998), [119].

## A.3 Modélisation des ondes longues

A priori, le modèle de courant moyen décrit dans le chapitre 1 est capable de traiter les ondes infragravitaires si on modifie le forçage par la houle; le champ des tensions de radiations doit évoluer au rythme des trains d'ondes.

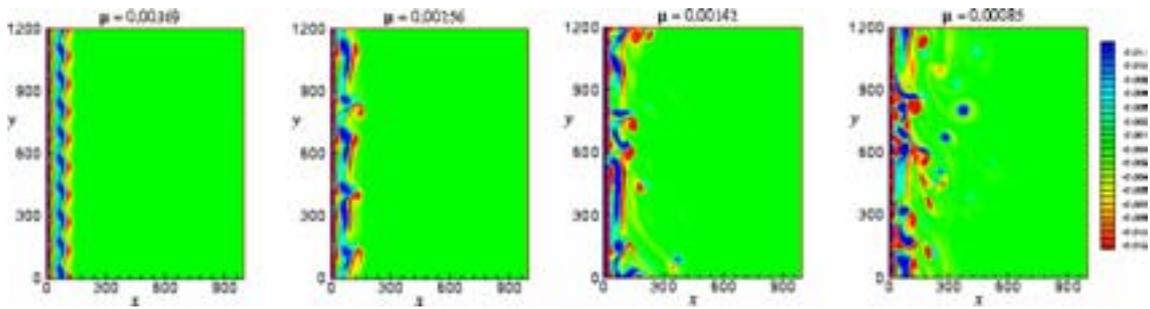


Figure A.4 : Champ de vorticité pour différents coefficients de frottement; selon Slinn et al. (1998), [119].

Les instabilités de cisaillement du courant longitudinal peuvent également être obtenues par le modèle de courant moyen. Cependant, comme ce n'est pas son principal but, la dissipation associée au cisaillement du courant n'est pas représentée de la même manière que dans le modèle de Slinn et al. (1998), [119]; on utilise une dissipation harmonique (1.58) associée à la viscosité turbulente (1.59) proposée par Longuet-Higgins (1970), [80]. La mise en évidence par Slinn et al d'une dynamique tourbillonnaire à une échelle de temps supérieure à celle de la houle, à partir d'un modèle de courant très voisin de celui qu'on utilise pour calculer les courants moyens, permet d'expliquer certaines difficultés de converger vers une solution stationnaire des courants moyens.

Pour prendre en compte les effets de ces ondes longues sur la morphodynamique à moyen terme, il est nécessaire de compléter le modèle de courant moyen décrit dans le chapitre 1.

## Annexe B

# Modélisation du frottement au fond

Les processus de transport sédimentaire en présence de courant et/ou de vagues ont lieu principalement près du fond. Il est par conséquent important de déterminer au mieux la direction et l'intensité des contraintes de cisaillement sur les fonds qui présente un relief varié (lisse, rides, dunes). Van Rijn (1990), [142], et Soulsby (1997), [122] rassemblent dans leurs manuels de nombreux modèles pour déterminer la contrainte de frottement sur un fond sédimentaire en présence de houle et de courant. A partir de données expérimentales acquises en laboratoire, Voulgaris et al. (1995), [145], montrent que les principaux modèles utilisés en ingénierie côtière ne permettent pas de prendre entièrement en compte des effets de la période des vagues sur la contrainte de frottement au fond dans des écoulements combinés. Soulsby et al. (1993), [123], analysent huit modèles différents et les comparent dans le but d'unifier les expressions et d'en tirer une formulation simplifiée pour la contrainte de frottement combinée en présence de houle et de courant.

### B.1 Courant seul

La contrainte associée à un courant seul de vitesse moyenne  $U_c = \|\vec{U}\|$  est donnée par:

$$\tau_c = \rho C_D U_c^2 \quad (\text{B.1})$$

La contrainte de frottement est pondérée par le coefficient de friction  $C_D$ . Le coefficient de friction pour le courant est appelé coefficient de traîné  $C_D$ . Il est déterminé en fonction

de la profondeur et de la rugosité du lit  $k_{sc}$  vue par le courant:

$$C_D(k_{sc}) = \left( \frac{0.4}{1 + \ln\left(\frac{k_{sc}}{30h}\right)} \right)^2 \quad (\text{B.2})$$

La rugosité est un paramètre clé dans la modélisation du frottement. On retrouve couramment l'équivalence  $z_{0c} = k_{sc}/30$ , où la longueur de rugosité  $z_{0c}$  est exprimée en fonction de la rugosité "grain de sable équivalente"  $k_{sc}$  introduite par Nikuradse (1932), [94]. La contrainte totale qui agit sur le fond résulte du frottement de peau caractérisée par la rugosité du grain  $k_{sc,g}$ , d'une traînée due à la forme du fond caractérisée par la rugosité  $k_{sc,f}$  et d'une contribution complémentaire liée au transport sédimentaire caractérisée par la rugosité  $k_{s,ct}$ :

$$\tau_c = \rho (C_D(k_{s,cg}) + C_D(k_{s,cf}) + C_D(k_{s,t})) U_c^2 \quad (\text{B.3})$$

Van Rijn (1990), [142], et Soulsby (1997), [122], propose les définitions des rugosités:

$$k_{s,cg} = 4.5d_{50} \quad (\text{B.4})$$

$$k_{s,cf} = 20\gamma_r\Delta_r \left( \frac{\Delta_r}{\lambda_r} \right) + 1.1\gamma_d\Delta_d \left( 1 - e^{-\frac{25\Delta_d}{\lambda_d}} \right) \quad (\text{B.5})$$

$$k_{s,ct} = 5\theta_{cg}d_{50} \quad (\text{B.6})$$

où le paramètre de Shields de grain pour le courant est défini par:

$$\theta_{cg} = \frac{\tau_c(k_{s,cg})}{\rho g(s-1)d_{50}} \quad (\text{B.7})$$

Selon Van Rijn (1990), [142], la longueur d'onde  $\lambda_d$  et la hauteur  $\Delta_d$  des dunes sous-marines sont approchée par:

$$\Delta_d = 0 \quad \text{si } \theta_{cg} < \theta_{cr} \quad (\text{B.8})$$

$$\Delta_d = 0.11h \left( \frac{d_{50}}{h} \right) (1 - e^{-0.5Tcs}) (25 - Tcs) \quad \text{si } \theta_{cr} < \theta_{cg} < 25\theta_{cr} \quad (\text{B.9})$$

$$\Delta_d = 0 \quad \text{si } \theta_{cr} < \theta_{cg} \quad (\text{B.10})$$

$$\lambda_d = 7.3h \quad (\text{B.11})$$

La valeur moyenne du paramètre de présence est choisie  $\gamma_d = 0.7$ .  $Tcs = (\theta_{cg} - \theta_{cr})/\theta_{cr}$  et le nombre de Shields critique est défini par:

$$\theta_{cr} = \frac{0.24}{D^*} + 0.055 (1 - e^{-0.02D^*}) \quad (\text{B.12})$$

$$D^* = \frac{g(s-1)}{\nu^2} d_{50} \quad (\text{B.13})$$

La valeur moyenne du paramètre de présence des rides est choisie  $\gamma_r = 0.7$ . La longueur d'onde  $\lambda_r$  et la hauteur  $\Delta_r$  des rides sont décrites dans la partie consacrée à la houle.

## B.2 Houle seule

La contrainte associée à une houle seule de vitesse orbitale au fond  $U_w = \overline{[\|\vec{u}\|]}_{Z_f}$  est donnée par:

$$\tau_w = \frac{1}{2}\rho f_w U_w^2 \quad (\text{B.14})$$

où la vitesse orbitale au fond est déterminée par le modèle de houle. Le coefficient de friction  $f_w$  pour les vagues est dépendant du régime d'écoulement (laminaire, turbulent lisse, turbulent rugueux). Les modèles empiriques sont donc directement fonction du nombre de Reynolds des vagues  $R_w = U_w A_w / \nu$  et de la rugosité relative  $\frac{30A_w}{k_{sw}}$ , où  $A_w = U_w T / 2\pi$  est la demi-excursion orbitale au fond et  $k_{sw}$  est la rugosité lit vue par les vagues. Myrhaug (1989), [90], propose une relation pour  $f_w$  valide pour tous les régimes turbulents, mais son expression implicite la rend difficile à exploiter. Pour simplifier l'obtention du coefficient de frottement, deux cas sont distingués en fonction de dépendance à la rugosité relative et au régime. Pour le régime turbulent rugueux, Soulsby (1993), propose une relation dépendante uniquement de la rugosité relative:

$$f_{wr}(k_{sw}) = 1.39 \left( \frac{30A_w}{k_{sw}} \right)^{-0.52} \quad (\text{B.15})$$

tandis que pour les autres régimes, le coefficient de frottement est indépendant de la rugosité relative:

$$f_{ws} = BR_w^{-N} \quad (\text{B.16})$$

avec

$$(B, N) = (2, 0.5) \quad \text{pour } R_w \leq 5.10^5 \text{ (laminaire)} \quad (\text{B.17})$$

$$(B, N) = (0.051, 0.187) \quad \text{pour } R_w > 5.10^5 \text{ (turbulent lisse)} \quad (\text{B.18})$$

Le coefficient de frottement pour les vagues est ensuite choisi tel que:

$$f_w = \text{Max}\{f_{wr}, f_{ws}\} \quad (\text{B.19})$$

De la même manière que pour le courant, la contrainte totale qui agit sur le fond résulte du frottement de peau caractérisée par la rugosité du grain  $k_{sw,g}$  et d'une traînée due à la forme du fond caractérisée par la rugosité  $k_{sw,f}$ .

$$\tau_w = \frac{1}{2}\rho (f_w(k_{s,wg}) + f_w(k_{s,wf})) U_w^2 \quad (\text{B.20})$$

L'analyse critique de quatre modèles permet à Van Rijn de proposer une rugosité de grain fonction du paramètre de mobilité des vagues  $\psi$ :

$$k_{s,wg} = 4.5d_{50} \quad \text{si } \psi = \frac{U_w^2}{g(s-1)d_{50}} < 250 \quad (\text{B.21})$$

$$k_{s,wg} = 4.5d_{50}(0.04\psi - 9) \quad \text{sinon} \quad (\text{B.22})$$

$$(\text{B.23})$$

La rugosité de forme proposée par Van Rijn (1990), [142], est voisine de celle de Swart (1976), [129], Grant et al. (1982), [58] et Raudkivi (1988), [105]. Elles reposent toutes sur la hauteur des rides et leur cambrure:

$$k_{s,wf} = 20\Delta_r \left( \frac{\Delta_r}{\lambda_r} \right) \quad (\text{B.24})$$

Nielsen (1992), propose pour des vagues régulières:

$$\Delta_r = \frac{\Delta_r}{\lambda_r} = 0 \quad \text{si } \theta_{wg} < \theta_{cr} \quad \text{ou } \psi > 156 \quad \text{ou } \theta_{wg} > 0.831 \quad (\text{B.25})$$

$$\Delta_r = (0.275 - 0.022\psi^{0.5}) A_w \quad \text{si } \psi < 156 \quad (\text{B.26})$$

$$\frac{\Delta_r}{\lambda_r} = (0.182 - 0.24\theta_{wg}^{1.5}) \quad \text{si } \theta_{wg} < 0.831 \quad (\text{B.27})$$

où le paramètre de Shields de grain pour les vagues est défini par:

$$\theta_{wg} = \frac{\tau_w(k_{s,wg})}{\rho g(s-1)d_{50}} \quad (\text{B.28})$$

### B.3 Combinaison houle et courant

Pour Van Rijn (1990), [142], seule l'intensité de la contrainte combinée  $\tau_m$  (houle+courant) est importante car elle détermine le mouvement des matériaux du lit; le transport se faisant principalement dans la direction du courant moyen. Si en première approche, la superposition linéaire des contraintes permet d'obtenir une contrainte combinée valide pour des écoulements laminaires ( $\tau_m = \tau_c + \tau_w$ ) il est indispensable de tenir compte des interactions non-linéaires qui apparaissent dans la couche limite houle-courant. Le modèle de Soulsby et al. (1993), [123], synthétise une grande partie des modèles et des données disponibles au sein de l'équipe MAST GM6:

$$\tau_m = \tau_c \left[ 1 + 1.2 \left( \frac{\tau_w}{\tau_c + \tau_w} \right)^{3.2} \right] \quad (\text{B.29})$$

et la contrainte maximum est donnée par:

$$\tau_{max} = [(\tau_m + \tau_w \cos(\alpha))^2 + (\tau_w \sin(\alpha))^2]^{\frac{1}{2}} \quad (\text{B.30})$$

où  $\alpha$  est l'angle entre le courant moyen et la direction de la houle.

Ainsi, dans le modèle de courant, les effets du frottement sur le fond sont représentés avec un coefficient de frottement global  $C_f$  appliqué à la vitesse du courant moyen  $U_c$ . On définit  $C_f$  à partir des relations (B.1) et (B.29):

$$C_f = C_D \left[ 1 + 1.2 \left( \frac{\tau_w}{\tau_c + \tau_w} \right)^{3.2} \right] \quad (\text{B.31})$$

La contrainte maximum n'a pas d'intérêt direct pour l'hydrodynamique moyenne, cependant du point de vue sédimentaire, elle permet de déterminer si le sédiment est mobilisé ou pas.



## Annexe C

# Lois de conservations et discontinuités

On considère la quantité locale  $\phi$  présente dans un volume  $\Omega$  délimité par la surface de frontière  $\Gamma$ . L'intensité de  $\phi$  varie en fonction du bilan des flux  $\vec{F}$  qui traversent la frontière  $\Gamma$ , et une contribution supplémentaire est à prendre en compte en présence de sources locales volumique  $R_\Omega$  ou surfacique  $\vec{R}_\Gamma$ . Ainsi, la forme générale de la loi de conservation pour  $\phi$  est donnée par:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \phi d\Omega + \oint_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{\Gamma} = \int_{\Omega} R_\Omega d\Omega + \oint_{\Gamma} \vec{R}_\Gamma \cdot d\vec{\Gamma} \quad (\text{C.1})$$

où  $d\vec{\Gamma}$  est une partie élémentaire de la frontière  $\Gamma$  orientée par sa normale sortante. Si considère une surface de discontinuité  $\Sigma$  qui se déplace à la vitesse  $\vec{C}$ , lorsque la discontinuité travers le volume de contrôle  $\Omega$ , la dérivé temporelle du volume intégrale devient:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \phi d\Omega = \int_{\Omega} \frac{\partial \phi}{\partial t} d\Omega - \oint_{\Gamma} \phi \vec{C} \cdot d\vec{\Gamma}$$

De plus, au voisinage de la discontinuité  $\Sigma$ , on peut écrire les relations suivantes:

$$\begin{aligned} \lim_{\Omega \rightarrow 0} \int_{\Omega} \varphi d\Omega &= 0 \quad \text{pour} \quad \varphi = \left\{ \frac{\partial \phi}{\partial t}, R_\Omega \right\} \\ \lim_{\Gamma \rightarrow \Sigma} \oint_{\Gamma} \vec{\varphi} \cdot d\vec{\Gamma} &= \int_{\Sigma} [\vec{\varphi}] \cdot d\vec{\Sigma} \quad \text{pour} \quad \vec{\varphi} = \{ \vec{F}, \vec{R}_\Gamma, \phi \vec{C} \} \end{aligned}$$

où l'opérateur:

$$[\varphi] = \varphi_g - \varphi_d$$

représente le saut de la quantité  $\varphi$  à travers l'interface  $\Sigma$ . On en déduit la relation de saut intégrale pour la loi de conservation (C.1):

$$\int_{\Sigma} ([\vec{F}] - [\phi]\vec{C} - [\vec{R}_{\Gamma}]) \cdot d\vec{\Sigma} = 0$$

La loi de conservation locale se déduit dans les sous domaines réguliers, à l'aide du théorème de Gauss:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{F} = R_{\Omega} + \vec{\nabla} \cdot \vec{R}_{\Gamma}$$

tandis qu'en présence d'une surface de discontinuité, orientée par la normale  $\vec{n}_{\Sigma}$ , la relation de Rankine-Hugoniot est donnée par:

$$[\vec{F}] \cdot \vec{n}_{\Sigma} - [\phi]\vec{C} \cdot \vec{n}_{\Sigma} - [\vec{R}_{\Gamma}] \cdot \vec{n}_{\Sigma} = 0$$

## Annexe D

# Théorie des surfaces caractéristiques

Le modèle de courant moyen peut s'écrire sous la forme:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + A^j \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} = \vec{B} \quad (\text{D.1})$$

avec le vecteur des inconnues  $\varphi = (U, V, \bar{h})^T$  et  $\vec{B}$  le vecteur colonne des termes sources non homogènes. Les matrices  $A^j$  et  $\vec{B}$  peuvent dépendre des variables  $(\vec{x}, t)$  et de la solution  $\varphi$  mais pas des dérivées de  $\varphi$ . La théorie des surfaces caractéristiques permet de représenter la solution par des ondes non linéaires. Les surfaces caractéristiques  $S(\vec{x}, t)$  permettent ainsi de séparer les zones déjà influencées par la propagation d'une perturbation, des zones non encore atteintes par l'onde. La solution générale du problème (D.1) s'écrit sous la forme complexe:

$$\varphi = \hat{\varphi} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)} \quad (\text{D.2})$$

avec la normale à la surface  $\vec{k} = \vec{\nabla} S$  et  $-\omega = \frac{\partial S}{\partial t}$ . Pour que  $S$  soit solution du problème homogène, les conditions de compatibilités doivent être vérifiées:

$$\det(-\omega I + k_j A^j) = 0$$

où  $I$  est la matrice identité. La vitesse de propagation  $\lambda = \omega/k$  associée à la surface caractéristique, dans la direction  $\vec{n} = \vec{k}/k$ , est donnée par les valeurs de propres de:

$$A = n_j A^j$$

Cette définition permet de mettre en évidence la nature du système d'équations qui sert à modéliser l'écoulement. S'il existe des valeurs réelles parmi les valeurs propres  $A$ ,  $\omega$  est réel et la solution (D.2) est une onde plane stable. Si on trouve une valeur propre complexe, on note:

$$\omega = \omega_r + i\omega_i$$

La solution (D.2) s'écrit:

$$\varphi = \hat{\varphi} e^{\omega_i t} e^{i(\vec{x} \cdot \vec{k} - \omega_r t)}$$

Si la partie imaginaire de la valeur propre est négative, la solution d'onde est stable et atténuée, par contre si la partie imaginaire de la valeur propre est positive, la solution d'onde est instable. Les problèmes hyperboliques sont alors définis par un ensemble de valeurs propres réelles tandis que les problèmes elliptiques sont définis par un ensemble de valeurs propres complexes. Pour une direction  $\vec{n}$  donnée pointé vers l'intérieur du domaine de calcul, le nombre de valeurs propres  $\lambda > 0$  de  $n_j A^j$  permettent de définir le nombre de conditions physiques à imposer sur les limites du domaine. Si  $\lambda$  est négatif dans cette direction, la variable caractéristique associée sortira du domaine de calcul.

Dans le cas où le terme de diffusion est négligeable, le modèle de courant 2DH instationnaire forme un système d'équations hyperboliques. Ce système n'est pas uniquement contrôlé par l'état de l'écoulement à l'intérieur du domaine, mais aussi par des ondes qui viennent de l'extérieur. Le problème aux limites nécessite donc de décrire à la fois les ondes entrantes et les ondes sortantes. Cette méthode basée sur les caractéristiques de l'écoulement est particulièrement efficace pour traiter les problèmes d'ondes car elle permet de les découpler presque entièrement. Comme le montre Hirsch (1988), [62], une manière de traiter le problème aux limites consiste à reformuler les équations du problème hyperbolique en fonction des variables caractéristiques. Ces nouvelles équations caractéristiques permettent de mettre en évidence des ondes quasiment indépendantes les unes des autres. Cette technique rend possible le forçage de l'écoulement par des ondes incidentes sans perturber l'évacuation des ondes vers l'extérieur du domaine. La difficulté est reportée en partie sur le forçage extérieur aux limites, car on doit définir les ondes incidentes extérieures au domaine.

Une fois que les vitesses caractéristiques sont déterminées, on reformule le problème pour identifier les variables caractéristiques. Par exemple, dans le cas  $\vec{n} = (1, 0)$  nous

pouvons réécrire le problème à la frontière sous la forme

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} + \Lambda_{A^x} \frac{\partial \Psi}{\partial x} = \vec{P} \quad (\text{D.3})$$

avec  $\Lambda_{A^x}$  la matrice des valeurs propres de  $A^x$  et  $L_{A^x}$  la matrice de changement de base, telles que  $\Lambda_{A^x} L_{A^x}^{-1} = L_{A^x}^{-1} A^x$  et  $\vec{P} = L_{A^x}^{-1} \vec{B}$ . Les variables caractéristiques  $\Psi$  vérifient donc  $\partial \Psi = L_A^{-1} \partial \Phi$ . On ne peut pas intégrer dans le cas général les variables  $\Psi$ , bien que  $\partial \Psi$  soient toujours définies. Les variables  $\Psi$  peuvent quand même être déterminées localement, si on linéarise autour d'un état de référence. On observe que ces variables ne sont généralement pas invariantes, puisque, en plus du terme purement convectif, il existe des termes de couplage dus au membre de droite dans (D.3).

La connaissance des vitesses caractéristiques d'un problème a un autre intérêt fondamental, puisque numériquement, pour des méthodes explicites, la solution physique ne doit pas parcourir plus d'une maille d'espace en un pas de temps, sous peine de déstabiliser la méthode de résolution. Les vitesses caractéristiques déterminent donc le critère CFL. Cette compatibilité entre les domaines de dépendances physiques et numériques est traitée par de nombreux ouvrages d'analyse numérique; Hirsh (1988), [62], Hirsh (1990), [63], Sod (1985), [121].



# Annexe E

## Préconditionnements et Solveurs

### E.1 Préconditionnement

On présente les principaux preconditionnements utilisés pour faciliter la résolution des systèmes linéaires  $Ax = b$ .

#### E.1.1 Préconditionnement Jacobi

La méthode de Jacobi est la plus simple, elle consiste à normaliser la matrice par la diagonale centrale de  $A$ , *i.e.*  $M_{i,j} = A_{i,i}$  si  $i = j$  et  $M_{i,j} = 0$  sinon. Dans certaines conditions, il se révèle quasiment optimal parmi les preconditionnements de forme diagonale; Van der Sluis (1969), [140]. Les preconditionnement de Jacobi ne requièrent que peu de stockage et sont faciles à implémenter. Leur parallélisation ne pose pas non plus de problème particuliers.

#### E.1.2 Préconditionnement SOR

Comme le preconditionnement de Jacobi, les méthodes de *Successive Over-Relaxation* sont déduites des coefficients de la matrice  $A$  sans calculs supplémentaires. Si on décompose la matrice symétrique initiale  $A = D + L + L^t$ , respectivement en la somme de ses

matrices diagonale, triangulaire inférieure et supérieure, la matrice SOR est définie par  $M = (D+L)D^{-1}(D+L)^T$ . Il en existe aussi une version paramétrée, mais qui est coûteuse à optimisée; Axelsson et Barker (1984), [6].

Le preconditionnement SOR est donné sous une forme factorisée ce qui lui confère les propriétés des méthodes basées sur une factorisation. Par contre, cette factorisation étant fixée *a priori*, il n'y a pas la possibilité de présence d'un diviseur nul dans une méthode itérative (*breakdown*) comme dans la phase de construction des méthodes de factorisations incomplètes.

### E.1.3 Factorisations Incomplètes de Cholesky

Lors de la factorisation de la matrice  $A$  sous la forme  $LU$  le remplissage des matrices doit être restreint pour limiter le temps de calcul et l'espace mémoire utilisé. La factorisation incomplète permet d'introduire cette limitation du remplissage en cherchant  $A = LU + R$  où  $L$  et  $U$  doivent être très creuses, et  $R$  aussi voisin de 0 que possible. Le système  $Ax = b$  est alors remplacé par  $L^{-1}AU^{-1}(Ux) = L^{-1}B$ . La convergence sera plus rapide si  $K(L^{-1}AU^{-1})$  est inférieur à  $K(A)$ .

Ces méthodes ILU diffèrent entre elles par la stratégie d'élimination et la règle de remplissage employées. Chan et Van der Vorst (1997), [26], présentent les preconditionnements de base ILU et modifiés MILU, ainsi que diverses variantes. Ils discutent aussi des aspects liés à la parallélisation de ces méthodes.

#### Factorisation ILU(k)

Meijerink et Van der Vorst (1977), [85], ont introduit la décomposition incomplète LU de manière générale et suggèrent que la combinaison de ce preconditionnement associé à la méthode du gradient conjugué (CG) pourrait conduire à une combinaison robuste et rapide.

ILU(k) utilise le concept de "niveau de remplissage". Lorsque  $k=0$ , les matrices  $L$  et  $U$  possèdent la même structure (même nombre et position des diagonales) que  $A$ , et les coefficients dans  $R$  doivent être nuls aux emplacements où les coefficients dans  $A$  sont non-nuls. Dans le cas des matrices multidiagonales, le niveau  $k$  correspond au nombre de diagonales rajoutées dans les matrices triangulaires. La figure E.1 présente l'algorithme de la factorisation ILU(0).

```

Pour  $i = 1, \dots, N$  Faire
  Pour  $k = 1, \dots, i$  Et Si  $a_{ik} \neq 0$  Faire
     $a_{ik} = a_{ik}/a_{kk}$ 
    Pour  $j = k + 1, \dots, N$  Et Si  $a_{ij} \neq 0$  Faire
       $a_{ij} = a_{ij} - a_{ik}a_{kj}$ 
    Fin Pour
  Fin Pour
Fin Pour

```

Figure E.1 : Algorithme de la factorisation incomplète  $ILU(0)$ .

### Factorisation ILUT

La factorisation  $ILU-Threshold$  utilise une double stratégie d'élimination par niveau de remplissage  $lfil$  et par seuil de tolérance  $tol$ . Tous les coefficients dont l'amplitude est inférieure au produit de la norme de la ligne courante par  $tol$ , sont éliminés et seuls les  $lfil$  plus grands coefficients de chaque ligne de  $L$  et  $U$  sont conservés. En pratique, pour caler ce preconditionnement, la tolérance est fixée, typiquement  $tol = 10^{-4}$ , et le  $lfil$  est modifié jusqu'à obtenir le remplissage souhaité; Chapman et al. (1996), [27].

### Factorisation ILUD

Cette méthode utilise le seuil de tolérance  $tol$  (comme décrit pour ILUT), et en plus une diagonale de compensation; Saad (1998), [110]. Les termes d'une ligne éliminés *via* le seuil de tolérance sont sommés puis multipliés par un facteur  $\alpha$  pour former une des lignes de la diagonale de compensation. Cette matrice diagonale de compensation est ensuite ajoutée à la diagonale de  $U$ . Pour le modèle de courant, on utilise les paramètres  $tol = 2 \cdot 10^{-3}$  et  $\alpha = 0.5$ .

## E.2 Solveurs itératifs

On décrit succinctement les principales méthodes que l'on a testées et employées pour résoudre le modèle de courant avec une préférence pour la méthode BiCGSTAB. Barrett et al. (1994), [10], Saad (1998), [110], décrivent plus précisément ces méthodes. Toutes les méthodes présentées ci-dessous sont applicables pour des matrices  $A$  non-symétriques,

hormis la méthode CG (*Conjugate Gradient*) qui n'est applicable qu'aux systèmes linéaires symétriques. Cependant, cette méthode est à la base de toutes les autres et elle mérite, par le fait, d'être introduite.

### E.2.1 méthode CG

La méthode du gradient conjugué est une des méthodes instationnaires les plus anciennes et des plus connues. Elle tire son nom du fait qu'elle génère une séquence de vecteurs conjugués (orthonormaux) qui sont les résidus de chaque itération. Ils sont aussi les gradients d'une forme quadratique dont la minimisation revient à résoudre le système linéaire. CG est une méthode très efficace quand la matrice des coefficients est symétrique définie positive, puisqu'elle ne nécessite que peu de stockage pour un nombre limité de vecteurs.

La solution intermédiaire  $x^{(k)}$  est mise à jour à chaque itération en la prolongeant par un multiple  $\alpha_k$  de la direction de descente  $p^{(k)}$ :

$$x^{(k)} = x^{(k-1)} + \alpha_k p^{(k)}$$

De même, le résidu (3.51) est mis à jour:

$$r^{(k)} = r^{(k-1)} + \alpha q^{(k)} \quad \text{avec} \quad q^{(k)} = Ap^{(k)} \quad (\text{E.1})$$

Le choix  $\alpha = \alpha_k = r^{(k)T} r^{(k)} / p^{(k)T} Ap^{(k)}$  minimise  $r^{(k)T} Ar^{(k)}$  parmi toutes les possibilités de  $\alpha$  dans l'équation (E.1).

Les directions de descentes sont mises à jour en exploitant les résidus:

$$p^{(k)} = r^{(k)} + \beta_{(k-1)} p^{(k-1)} \quad (\text{E.2})$$

où le choix  $\beta_k = r^{(k)T} r^{(k)} / r^{(k-1)T} r^{(k)}$  assure que  $p^{(k)}$  et  $p^{(k-1)}$  (ou de façon équivalente  $r^{(k)}$  et  $r^{(k-1)}$ ) sont orthogonaux.

Pour CG, les résidus forment une base orthogonale pour l'espace de Krylov  $\{r^{(0)}, \dots, A^{(k-1)}r^{(0)}\}$ . La solution intermédiaire  $x^{(k)}$  est donc construite à partir de la solution initiale  $x^{(0)}$  plus une combinaison linéaire de cette base, avec pour critère la minimisation du résidu  $\|r^{(k)}\| = \|b - Ax^{(k)}\|$ .

L'algorithme de la méthode CG préconditionnée par la matrice  $M$  est donné par la figure E.2.

**Calculer**  $r^{(0)} = b - Ax^{(0)}$  pour la condition initiale  $x^{(0)}$   
**Pour**  $k = 1, 2, \dots$  **Faire**  
     **Résoudre**  $Mz^{(k-1)} = r^{(k-1)}$   
      $\rho_{k-1} = r^{(k-1)T} z^{(k-1)}$   
     **Si**  $k = 1$  **Alors**  
          $p^{(1)} = z^{(0)}$   
     **Sinon**  
          $\beta_{k-1} = \rho_{k-1} / \rho_{k-2}$   
          $p^{(k)} = z^{(k-1)} + \beta_{k-1} p^{(k-1)}$   
     **Fin Si**  
      $q^{(k)} = Ap^{(k)}$   
      $\alpha_k = \rho_k / p^{(k)T} q^{(k)}$   
      $x^{(k)} = x^{(k-1)} + \alpha_k p^{(k)}$   
      $r^{(k)} = r^{(k-1)} - \alpha_k q^{(k)}$   
     **Si** converge **Alors ; Arrêter**  
     **Sinon**  
          $k = k + 1$  ; **Continuer**  
     **Fin Si**  
**Fin Pour**

Figure E.2 : Algorithme du gradient conjugué préconditionné (CG).

## E.2.2 méthode BiCG

La méthode du bi-gradient conjugué génère deux séries de vecteurs du type CG, une basée sur un système avec la matrice initiale des coefficients  $A$ , et l'autre sur sa transposée  $A^T$ . Au lieu d'orthogonaliser chaque séquence, elles sont construites mutuellement orthogonales (bi-orthogonale). Comme CG, cette méthode requiert un stockage limité. Elle est utilisée pour des matrices non symétriques et non singulière; cependant, la convergence peut être irrégulière, et il se peut que la méthode tombe (*breakdown*). BiCG nécessite un produit avec la matrice et avec sa transposée à chaque itération.

Ainsi, de la même manière que dans CG, les deux séries de résidus sont définies:

$$\begin{aligned} r^{(k)} &= r^{(k-1)} + \alpha_k A p^{(k)} \\ \tilde{r}^{(k)} &= \tilde{r}^{(k-1)} + \alpha_k A^t \tilde{p}^{(k)} \end{aligned}$$

et les deux descentes:

$$\begin{aligned} p^{(k)} &= r^{(k-1)} + \beta_{(k-1)} p^{(k-1)} \\ \tilde{p}^{(k)} &= \tilde{r}^{(k-1)} + \beta_{(k-1)} \tilde{p}^{(k-1)} \end{aligned}$$

Les choix:

$$\begin{aligned} \alpha^{(k)} &= \frac{\tilde{r}^{(k-1)T} r^{(k-1)}}{\tilde{p}^{kT} A p^{(k)}} \\ \beta_k &= \frac{\tilde{r}^{kT} r^k}{\tilde{r}^{(k-1)T} r^{(k-1)}} \end{aligned}$$

assurent les relations de bi-orthogonalités:

$$\tilde{r}^{kT} r^l = \tilde{p}^{kT} A p^l = 0 \quad \text{si } k \neq l$$

L'algorithme de la méthode BiCG préconditionnée par la matrice  $M$  est donné par la figure E.3.

## E.2.3 méthode BiCGSTAB

La méthode BiCG stabilisé est une variante du BiCG. Une remise à jour différente dans la série  $A^T$  est utilisée, pour obtenir une convergence plus régulière.

**Calculer**  $r^{(0)} = b - Ax^{(0)}$  pour la condition initiale  $x^{(0)}$   
**Choisir**  $\tilde{r}^{(0)}$  (par exemple  $\tilde{r}^{(0)} = r^{(0)}$ )  
**Pour**  $k = 1, 2, \dots$  **Faire**  
    **Résoudre**  $Mz^{(k-1)} = r^{(k-1)}$   
    **Résoudre**  $M^T \tilde{z}^{(k-1)} = \tilde{r}^{(k-1)}$   
     $\rho_{k-1} = z^{(k-1)T} \tilde{r}^{(k-1)}$   
    **Si**  $\rho_{k-1} = 0$  **Alors**  
        *Breakdown*  
    **Fin Si**  
    **Si**  $k = 1$  **Alors**  
         $p^{(k)} = z^{(k-1)}$   
         $\tilde{p}^{(k)} = \tilde{z}^{(k-1)}$   
    **Sinon**  
         $\beta_{k-1} = \rho_{k-1} / \rho_{k-2}$   
         $p^{(k)} = z^{(k-1)} + \beta_{k-1} p^{(k-1)}$   
         $\tilde{p}^{(k)} = \tilde{z}^{(k-1)} + \beta_{k-1} \tilde{p}^{(k-1)}$   
    **Fin Si**  
     $q^{(k)} = Ap^{(k)}$   
     $\tilde{q}^{(k)} = A^T \tilde{p}^{(k)}$   
     $\alpha_k = \rho_k / \tilde{p}^{(k)T} q^{(k)}$   
     $x^{(k)} = x^{(k-1)} + \alpha_k p^{(k)}$   
     $r^{(k)} = r^{(k-1)} - \alpha_k q^{(k)}$   
     $\tilde{r}^{(k)} = \tilde{r}^{(k-1)} - \alpha_k \tilde{q}^{(k)}$   
    **Si** converge **Alors ; Arrêter**  
    **Sinon**  
         $k = k + 1$  ; **Continuer**  
    **Fin Si**  
**Fin Pour**

Figure E.3 : Algorithme du bi-gradient conjugué preconditionné (BiCG).

Dans Bi-CG, le vecteur résidu  $r^{(k)}$  peut être reformulé comme le produit du résidu initial  $r^{(0)}$  par un polynôme  $P_k(A)$  de degré  $k$ :

$$\begin{aligned} r^{(k)} &= P_k(A)r^{(0)} \\ \tilde{r}^{(k)} &= P_k(A^t)\tilde{r}^{(0)} \end{aligned}$$

Pour Bi-CGSTAB, cette décomposition met en évidence un autre polynôme  $Q_k(A)$  associé au gradient de la descente:

$$\begin{aligned} r^{(k)} &= Q_k(A)P_k(A)r^{(0)} \\ \tilde{r}^{(k)} &= Q_k(A^T)P_k(A^T)\tilde{r}^{(0)} \end{aligned}$$

avec  $Q_k(x) = (1 - \omega_1 x)(1 - \omega_2 x) \cdots (1 - \omega_k x)$ , où  $\omega_i$  à la  $i^{me}$  itération est choisi pour minimiser  $r^{(k)}$ . Il faut être prudent sur l'utilisation du BiCGSTAB, car l'algorithme n'accepte pas les cas où  $\omega_k = 0$ .

Par contre, en prenant initialement  $Q_k(x) = P_k(x)$ , nous pouvons décrire (sans risque de *breakdown*) la méthode CG-Square ou Bi-CGSTAB2 qui convergent (légèrement) moins vite que BiCGSTAB (Van der Vorst (1995), [141]).

L'algorithme de la méthode BiCGSTAB préconditionnée par la matrice  $M$  est donné par la figure E.4.

## E.2.4 méthode FOM

Dans la méthode d'orthogonalisation totale, Saad (1981), [109], comme pour la méthode CG, la solution approchée est construite de façon à obtenir des résidus orthogonaux, et de former une base pour le sous-espace de Krylov.

Cette méthode est mathématiquement identique aux méthodes Orthores et GENCG. La méthode GMRES (*Generalized Minimum Residual*) ne présente pas de risque de *breakdown*. Elle est préférée à FOM pour toutes ces bonnes propriétés souvent obtenues à moindre frais. La différence majeure entre FOM et GMRES est que dans FOM, la dernière ligne ( $(i + 1)$ ème) est simplement éliminée, alors que dans GMRES cette ligne est transformée (par l'opérateur  $J$ , voir figure E.5) en un vecteur 0.

```

Calculer  $r^{(0)} = b - Ax^{(0)}$  pour la condition initiale  $x^{(0)}$ 
Choisir  $\tilde{r}^{(0)}$  (par exemple  $\tilde{r}^{(0)} = r^{(0)}$ )
Pour  $k = 1, 2, \dots$  Faire
     $\rho_{k-1} = \tilde{r}^T r^{(k-1)}$ 
    Si  $\rho_{k-1} = 0$  Alors ; Breakdown
    Fin Si
    Si  $k = 1$  Alors
         $p^{(k)} = r^{(k-1)}$ 
    Sinon
         $\beta_{k-1} = (\rho_{k-1}/\rho_{k-2})(\alpha_{k-1}/\omega_{k-1})$ 
         $p^{(k)} = r^{(k-1)} + \beta_{k-1}(p^{(k-1)} - \omega_{k-1}v^{(k-1)})$ 
    Fin Si
    Résoudre  $M\hat{p} = p^{(k)}$ 
     $v^{(k)} = A\hat{p}$ 
     $\alpha_k = \rho_{k-1}/\tilde{r}^{(k)T}v^{(k)}$ 
     $s = r^{(k-1)} - \alpha_k v^{(k)}$ 
    Si  $\|s\|$  suffisamment petit Alors
         $x^{(k)} = x^{(k-1)} + \alpha_k p^{(k)}$  ; Arrêter
    Sinon
        Résoudre  $M\hat{s} = s$ 
         $t = A\hat{s}$ 
         $\omega_k = t^T s / t^T t$ 
         $x^{(k)} = x^{(k-1)} + \alpha_k p^{(k)} + \omega_k \hat{s}$ 
         $r^{(k)} = s - \omega_k t$ 
    Si converge Alors ; Arrêter
    Sinon
        Si  $\omega_k \neq 0$  Alors
             $k = k + 1$  ; Continuer
        Sinon ; Breakdown
        Fin Si
    Fin Si
Fin Pour

```

Figure E.4 : Algorithme du bi-gradient conjugué preconditionné (BiCGSTAB).

### E.2.5 méthode GMRES

La forme la plus populaire de GMRES est basée sur la méthode d'orthogonalisation d'Arnoldi qui procure explicitement une base orthogonale  $\{v^{(k)}\}$  du sous-espace de Krylov  $\{A^{(k)}r^{(0)}\}$ . La solution intermédiaire  $x^{(k)}$  s'obtient alors comme pour CG (où cette base est formée par les résidus eux-mêmes)

$$x^{(k)} = x^{(0)} + y_1 v^{(1)} + \dots + y_k v^{(k)}$$

avec les coefficients  $y_k$  choisis pour minimiser le résidu  $\|b - Ax^{(k)}\|$ .

Dans le but de réduire l'espace de stockage nécessaire et le coût de calcul dû à l'orthogonalisation, GMRES est redémarré après un nombre donné  $m$  d'itérations. La méthode est alors rebaptisée GMRES( $m$ ). La difficulté reste de trouver la valeur de  $m$  optimale pour éviter à la fois les calculs (et stockages) excessifs si  $m$  est trop grand, et la lenteur (ou l'absence) de la convergence si  $m$  est trop petit.

L'algorithme de la méthode GMRES( $m$ ) préconditionnée par la matrice  $M$  est donné par la figure E.5.

$x^{(0)}$  est la condition initiale

**Pour**  $j = 1, 2, \dots$  **Faire**

**Résoudre**  $r$  à partir de  $Mr = b - Ax^{(0)}$

$v^{(1)} = r / \|r\|_2$

$s = \|r\|_2 e_1$  avec  $e_i$  est le  $i$ ème vecteur canonique de  $\mathcal{R}^i$

**Pour**  $i = 1, 2, \dots, m$  **Faire**

**Recoudre**  $w$  à partir de  $Mw = b - Av^{(i)}$

**Pour**  $k = 1, 2, \dots, i$  **Faire**

$h_{k,i} = (w, v^{(k)})$

$w = w - h_{k,i} v^{(k)}$

**Fin Pour**

$h_{i+1,i} = \|w\|_2$

$v^{(i+1)} = w / h_{i+1,i}$

**Appliquer**  $J_1, \dots, J_{i-1}$  à  $h_{1,i}, \dots, h_{i+1,i}$

**Construire**  $J_i$  en transformant les  $(i)$ ème et  $(i + 1)$ ème composantes des lignes  $h_{.,i}$ , pour que cette  $(i + 1)$ ème composante de  $J_i h_{.,i}$  soit 0

$s = J_i s$

**SI**  $s(i + 1)$  suffisamment petit **Alors**

**UPDATE** $(\hat{x}, i)$ ; **Arrêter**

**Fin Si**

**Fin Pour**

**UPDATE** $(\hat{x}, m)$

**Fin Pour**

Dans cet algorithme, **UPDATE** $(\hat{x}, i)$  remplace les calculs suivants:

**Calculer** la solution  $y$  de  $Hy = \hat{s}$ , où la partie triangulaire supérieure  $i \times i$  de  $H$  possède  $h_{i,j}$  comme coefficients (au sens des moindres carrés si  $H$  est singulière),  $\tilde{s}$  représente la première des  $i$  composantes de  $s$

$\tilde{x}^{(k)} = x^{(0)} + y_1 v^{(1)} + \dots + y_i v^{(i)}$

$s^{(i+1)} = \|b - A\tilde{x}\|_2$

**Si**  $\tilde{x}$  suffisamment précis **Alors**; **Arrêter**

**Sinon**

$x^{(0)} = \tilde{x}$

$j = j + 1$ ; **Continuer**

**Fin Si**

Figure E.5 : Algorithme de la méthode générale des résidus minimums (GMRES( $m$ )).



# Annexe F

## Discrétisation numérique

### F.1 Loi de conservation de la quantité de mouvement

suivant  $\vec{y}$

#### a. inertie

Pour le schéma temporel (Q:1), le terme inertiel est déterminé par:

$$\frac{1}{\Omega_{y^{i,j}}} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega_{y^{i,j}}} Q_y d\Omega = \frac{Q_{y^{i,j}}^{n+1} - Q_{y^{i,j}}^n}{dt} \quad (\text{F.1})$$

Le terme inertiel vient pondérer uniquement le noeud central du schéma et le second membre du schéma, (F.1) se met sous la forme:

$$M_{ya} Q_1 - D_{ay}$$

#### b. convection

Le terme convectif est donné par:

$$\frac{1}{\Omega_{y^{i,j}}} \oint_{\Gamma_{y^{i,j}}} \vec{F} d\Gamma = \frac{F_x|_{cc^{i+1,j}} - F_x|_{cc^{i,j}}}{dxc_{i,j}} + \frac{F_y|_{gg^{i,j}} - F_y|_{gg^{i,j-1}}}{dyg_{i,j}} \quad (\text{F.2})$$

avec

$$\begin{aligned} F_x|_{cci,j} &= Q_y|_{cci,j}^{n+1} \left[ Q_x|_{cci,j} \frac{1}{h} \Big|_{cci,j} \right]^* \\ F_y|_{ggi,j} &= Q_y|_{ggi,j}^{n+1} \left[ \frac{Q_y|_{ggi,j}}{h_{i,j}} \right]^* \end{aligned} \quad (\text{F.3})$$

Le terme convectif ne vient pondérer que les noeuds principaux du schéma puisqu'en utilisant les interpolations, la discrétisation du terme convectif se met sous la forme:

$$\sum_{p=1}^5 M_{ybp} Q_p$$

Remarque: on peut constater que les termes croisés du tenseur  $\vec{Q}^{n+1} \otimes \left[ \frac{\vec{Q}}{h} \right]^*$  sont discrétisés spatialement de la même manière dans (3.38) et dans (F.3). Cependant, on a montré que la discrétisation temporelle conduit à une formulation non-symétrique (3.14). Au final, ce tenseur n'est donc pas discrétisé de manière strictement symétrique.

### c. pression hydrostatique

Le terme de pression hydrostatique est donné par:

$$\frac{1}{\Omega_{y i,j}} \int_{\Omega_{y i,j}} g h^* \frac{\partial \Phi}{\partial y} d\Omega = g h^*|_{gci,j} \frac{\Phi_{i,j} - \Phi_{i,j-1}}{dyg_{i,j}} \quad (\text{F.4})$$

avec

$$\Phi_{i,j} = h_{i,j}^{n+1} + Z_f i,j$$

où  $h_{i,j}^{n+1}$  est donné par la discrétisation (3.34). La contribution de la forme du fond  $Z_f$  n'intervient qu'au second membre du schéma. La discrétisation du terme de pression hydrostatique se met sous la forme:

$$\sum_{p \in \{1,4,5\}} M_{ycp} Q_p + \sum_{l=10}^{13} M_{ycl} Q_l - D_{cy}$$

### d. frottement sur le fond

Le terme lié à la force de friction sur le fond est donné par:

$$\frac{1}{\Omega_{y i,j}} \int_{\Omega_{y i,j}} K_f^* \Phi_y d\Omega = K_f^*|_{gci,j} \Phi_{y i,j} \quad (\text{F.5})$$

avec

$$\Phi_{y i,j} = Q_{y i,j}^{n+1} + \tilde{Q}_{y i,j}$$

La contribution du débit total  $Q_y^{n+1}$  vient pondérer uniquement le noeud central du schéma, tandis que la contribution du débit induit par la houle  $\tilde{Q}_y$  ne s'applique que sur le second membre du schéma. La discrétisation du terme de frottement sur le fond se met sous la forme:

$$M_{y d 1} Q_1 - D_{d y}$$

### e. diffusion turbulente

Le terme de diffusion turbulente est donné en suivant la discrétisation (F.2) avec:

$$\begin{aligned} F_x|_{cc i,j} &= F_y|_{cc i,j} \quad \text{cf. (3.41)} \\ F_y|_{gg i,j} &= 2 \cdot [K_m h]_{i,j}^* \frac{U_{y i,j+1}^* - U_{y i,j}^*}{d y c_i} \end{aligned}$$

Comme le tenseur des contraintes turbulentes est symétrique,  $F_x|_{cc i,j}$  est donné par le terme  $F_y|_{cc i,j}$  dans (3.41). De même, les composantes de la vitesse  $\vec{U}^*$  sont définies par (3.42) et (3.43). La contribution du débit induit par la houle  $\vec{\tilde{Q}}$  n'intervient qu'au second membre du schéma, par contre, la contribution du débit total permet de coupler tous les noeuds du schéma. La discrétisation du terme de diffusion turbulente se met sous la forme:

$$\sum_{p=1}^5 M_{y e p} Q_p + \sum_{l=10}^{13} M_{y e l} Q_l - D_{e y}$$

Remarque: de par la discrétisation temporelle, le tenseur des contraintes turbulentes est rendu linéaire en fonction des variables de résolution. A la différence des termes convectifs, ce tenseur symétrique par définition est bien discrétisé de manière strictement symétrique.

### f. tensions de radiation

Le terme de tensions de radiation est donné en suivant la discrétisation (F.2) avec:

$$\begin{aligned} F_x|_{cc i,j} &= F_y|_{cc i,j} \quad \text{cf. (3.44)} \\ F_y|_{gg i,j} &= \frac{1}{\rho} S_{yy}|_{gg i,j} \end{aligned}$$

Comme le tenseur des tensions de radiation est symétrique,  $F_x|_{cc i,j}$  est donné par le terme  $F_y|_{cc i,j}$  dans (3.44). La discrétisation du terme de diffusion turbulente se met sous la forme:

$$-D_{fy}$$

## F.2 Conditions limites

Sur le maillage cartésien, on repère les contours du domaine par les points cardinaux, en fonction de la direction de la normale  $\vec{n}$  à la frontière.  $\vec{n}$  est dirigée vers l'intérieur du domaine de calcul et on appelle  $\vec{t}$  le vecteur tangent à la frontière. On définit donc les frontières, leur normale et les indices du maillage scalaire correspondants de la façon suivante:

$$\text{OUEST: } \vec{n}_O = (1, 0) \quad \text{et } i_s = 1$$

$$\text{EST: } \vec{n}_E = (-1, 0) \quad \text{et } i_s = LM$$

$$\text{NORD: } \vec{n}_N = (0, -1) \quad \text{et } j_s = 1$$

$$\text{SUD: } \vec{n}_S = (0, 1) \quad \text{et } j_s = MM$$

### a. condition de Neumann

La condition de Neumann homogène consiste à interpoler la solution au bord du domaine de manière constante. Le gradient de la solution normale à la frontière est nul:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0$$

Dans le cas où  $\Phi = \vec{Q} \cdot \vec{n}$ , la condition de flux nul est réalisée à l'ordre 2, sur le noeud scalaire limite  $(i_s, j_s)$ . La condition discrétisée se note:

$$\text{OUEST : } \Phi_{i_s, j_s} - \Phi_{i_s+1, j_s} = 0$$

$$\text{EST : } \Phi_{i_s, j_s} - \Phi_{i_s-1, j_s} = 0$$

$$\text{NORD : } \Phi_{i_s, j_s} - \Phi_{i_s, j_s+1} = 0$$

$$\text{SUD : } \Phi_{i_s, j_s} - \Phi_{i_s, j_s-1} = 0$$

Le schéma de cette condition limite peut se représenter sur 3 noeuds du schéma général du modèle de courant avec des pondérations spécifiques en fonction du type de frontière:

$$\begin{aligned} \text{OUEST: } & Q_1 = Qx_{i_s, j_s}, \quad Q_1 - Q_2 = 0 \\ \text{EST: } & Q_1 = Qx_{i_s+1, j_s}, \quad Q_1 - Q_3 = 0 \\ \text{NORD: } & Q_1 = Qy_{i_s, j_s+1}, \quad Q_1 - Q_5 = 0 \\ \text{SUD: } & Q_1 = Qy_{i_s, j_s}, \quad Q_1 - Q_4 = 0 \end{aligned}$$

Dans le cas où  $\Phi = \vec{Q} \cdot \vec{t}$ , la condition de flux nul est réalisée à l'ordre 1 sur la frontière. On rappelle que le noeud vectoriel est décalé par rapport au noeud scalaire; c'est pourquoi la condition de Neumann n'est pas réellement réalisée sur le noeud scalaire limite  $(i_s, j_s)$ , mais quand même sur la frontière. La condition discrétisée se note:

$$\begin{aligned} \text{OUEST} & : \Phi_{i_s, j_s} - \Phi_{i_s+1, j_s} = 0 \\ \text{EST} & : \Phi_{i_s, j_s} - \Phi_{i_s-1, j_s} = 0 \\ \text{NORD} & : \Phi_{i_s, j_s} - \Phi_{i_s, j_s-1} = 0 \\ \text{SUD} & : \Phi_{i_s, j_s} - \Phi_{i_s, j_s+1} = 0 \end{aligned}$$

Le schéma de cette condition limite peut se représenter sur 3 noeuds du schéma général du modèle de courant avec des pondérations spécifiques en fonction du type de frontière:

$$\begin{aligned} \text{OUEST: } & Q_1 = Qy_{i_s, j_s}, \quad Q_1 - Q_2 = 0 \\ \text{EST: } & Q_1 = Qy_{i_s+1, j_s}, \quad Q_1 - Q_3 = 0 \\ \text{NORD: } & Q_1 = Qx_{i_s, j_s}, \quad Q_1 - Q_5 = 0 \\ \text{SUD: } & Q_1 = Qx_{i_s, j_s}, \quad Q_1 - Q_4 = 0 \end{aligned}$$

## b. condition de Dirichlet

La condition limite de type Dirichlet consiste à imposer une valeur sur l'inconnue concernée:

$$\Phi - \Phi_{impose} = 0$$

Dans le cas où  $\Phi = \vec{Q} \cdot \vec{n}$ , la condition de flux nul est réalisée à l'ordre 2, sur le noeud scalaire limite  $(i_s, j_s)$ . La condition discrétisée se note:

$$\text{OUEST} : \Phi_{i_s, j_s} - \Phi_{i_s+1, j_s} = 2 \cdot \Phi_{impose}$$

$$\text{EST} : \Phi_{i_s, j_s} - \Phi_{i_s+1, j_s} = 2 \cdot \Phi_{impose}$$

$$\text{NORD} : \Phi_{i_s, j_s} - \Phi_{i_s, j_s+1} = 2 \cdot \Phi_{impose}$$

$$\text{SUD} : \Phi_{i_s, j_s} - \Phi_{i_s, j_s+1} = 2 \cdot \Phi_{impose}$$

Le schéma de cette condition limite peut se représenter sur 3 noeuds du schéma général du modèle de courant avec des pondérations spécifiques en fonction du type de frontière:

$$\text{OUEST} : Q_1 = Qx_{i_s, j_s}, \quad Q_1 + Q_2 = 2 \cdot Q_{impose}$$

$$\text{EST} : Q_1 = Qx_{i_s+1, j_s}, \quad Q_1 + Q_3 = 2 \cdot Q_{impose}$$

$$\text{NORD} : Q_1 = Qy_{i_s, j_s+1}, \quad Q_1 + Q_5 = 2 \cdot Q_{impose}$$

$$\text{SUD} : Q_1 = Qy_{i_s, j_s}, \quad Q_1 + Q_4 = 2 \cdot Q_{impose}$$

Dans le cas où  $\Phi = \vec{Q} \cdot \vec{t}$ , la condition de flux nul est parfaitement réalisée sur la frontière. La condition discrétisée se note:

$$\text{OUEST ou EST ou NORD ou SUD} : \Phi_{i_s, j_s} = \Phi_{impose}$$

Le schéma de cette condition limite peut se représenter sur le noeud central du schéma général du modèle de courant:

$$\text{OUEST ou EST} \quad Q_1 = Qy_{i_s, j_s}, \quad Q_1 = Q_{impose}$$

$$\text{NORD ou SUD} \quad Q_1 = Qx_{i_s, j_s}, \quad Q_1 = Q_{impose}$$

Remarque: Les conditions de Neumann et Dirichlet mobilisent les mêmes noeuds, le schéma général des conditions limites peut s'exprimer sur les 5 noeuds principaux du schéma du modèle de courant. De plus, il est possible de pondérer les deux relations pour réaliser l'une ou l'autre en fonction de la pondération  $\mathcal{P}$ :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} + \mathcal{P}(\Phi - \Phi_{impose}) = 0$$

avec

$$\mathcal{P} = 0 : \text{Condition de Neumann homogène}$$

$$\mathcal{P} \rightarrow \infty : \text{Condition de Dirichlet}$$

Pour  $\Phi = Q_x$ , on applique le schéma suivant sur le noeud central  $Q_1 = Qx_{i_s+k, j_s}$ :

$$(1 - \mathcal{P})Q_1 - (c_2Q_2 + c_3Q_3) + (\mathcal{P} - 1)(c_4Q_4 + c_5Q_5) = 2.\mathcal{P}Q_{impose}$$

avec

$$\text{Frontière} : (k, c_2, c_3, c_4, c_5)$$

$$\text{OUEST} : (0, 1, 0, 0, 0)$$

$$\text{EST} : (1, 0, 1, 0, 0)$$

$$\text{NORD} : (0, 0, 0, 0, 1)$$

$$\text{SUD} : (0, 0, 0, 1, 0)$$

Pour  $\Phi = Q_y$ , on applique le schéma suivant sur le noeud central  $Q_1 = Qy_{i_s, j_s+k}$ :

$$(1 - \mathcal{P})Q_1 + (\mathcal{P} - 1)(c_2Q_2 + c_3Q_3) - (c_4Q_4 + c_5Q_5) = 2.\mathcal{P}Q_{impose}$$

avec

$$\text{Frontière} : (k, c_2, c_3, c_4, c_5)$$

$$\text{OUEST} : (0, 1, 0, 0, 0)$$

$$\text{EST} : (0, 0, 1, 0, 0)$$

$$\text{NORD} : (1, 0, 0, 0, 1)$$

$$\text{SUD} : (0, 0, 0, 1, 0)$$

### c. condition périodique

Pour réaliser un domaine numérique “bouclé sur lui-même” dans une direction donnée, on écrit l'égalité entre les variables aux deux extrémités. La condition générale pour que la solution soit périodique de longueur d'onde  $\vec{L}$  est donnée par:

$$[\Phi]_{\vec{x}} = [\Phi]_{\vec{x} + \vec{L}}$$

Pour simplifier, on a choisi de rendre le domaine périodique suivant la direction  $\vec{n}_O = (1, 0)$ . Avec la méthode de résolution implicite, les conditions limites périodiques sont mises en place sur les frontières OUEST et EST:

$$\text{OUEST} : [\Phi]_{i_s, j_s} = [\Phi]_{i_s+k_p, j_s}$$

$$\text{EST} : [\Phi]_{i_s, j_s} = [\Phi]_{i_s-k_p, j_s}$$

Par définition, on a  $i_s = 1$  sur la frontière OUEST et  $i_s = LM$  sur la frontière EST. Ici, on en déduit:

$$k_p = LM - 1$$

Par rapport au schéma général du modèle de courant sur 9 noeuds (5 noeuds principaux + 4 noeuds de couplage), il est nécessaire de rajouter 2 noeuds principaux repérés par:

$$\begin{aligned} Q_{14} &= Q_{x\ i+k_p,j} & \text{ou} & & Q_{14} &= Q_{y\ i+k_p,j} \\ Q_{15} &= Q_{x\ i-k_p,j} & \text{ou} & & Q_{15} &= Q_{y\ i-k_p,j} \end{aligned}$$

Pour  $\Phi = \vec{Q} \cdot \vec{n}$ , le schéma de cette condition limite peut se représenter sous la forme:

$$\begin{aligned} \text{OUEST: } & Q_1 = Q_{x\ i_s,j_s}, & Q_1 - Q_{14} &= 0 \\ \text{EST: } & Q_1 = Q_{x\ i_s+1,j_s}, & Q_1 - Q_{15} &= 0 \end{aligned}$$

Pour  $\Phi = \vec{Q} \cdot \vec{t}$ , le schéma de cette condition limite peut se représenter sous la forme:

$$\begin{aligned} \text{OUEST: } & Q_1 = Q_{y\ i_s,j_s}, & Q_1 - Q_{14} &= 0 \\ \text{EST: } & Q_1 = Q_{y\ i_s,j_s}, & Q_1 - Q_{15} &= 0 \end{aligned}$$

# Bibliographie

- [1] V. I. Agoshkov, D. Ambrosi, V. Pennati, A. Quarteroni, and F. Saleri. Mathematical and numerical modelling of shallow water flow. *Computational Mechanics*, 11:280–299, 1993.
- [2] J. S. Allen, P. A. Newberger, and R. A. Holam. Nonlinear shear instabilities of alongshore currents on plane beaches. *Journal of Fluid Mechanics*, 310:181–213, 1996.
- [3] F. Arandiga, R. Donat, and A. Harten. Multiresolution based on weighted averages of the hat function ii: Nonlinear reconstruction techniques. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 20(3):1053–1093, 1999.
- [4] A. S. Arcilla, A. Vidaor, and J. Pous. Improved longshore sand transport evaluation. In *Proceeding 21st. Coastal Engineering Conference, ASCE*, pages 1382–1395, Malaga, 1988.
- [5] US Govt Printing Office Army Corps of Engineers, Coastal Engineering Research center. Shore protection manual, vol. 2, u.s., 1984.
- [6] O. Axelson and A. Brker. *Finite element solution of boundary value problems. Theory and computation*. Academic Press, 1984.
- [7] R.A. Bagnold. Experiments on a gravity-free surface dispersion of large solid spheres in newtonian fluid under shear. *Proc. Roy. Soc. London*, 225:49–63, 1954.
- [8] J. A. Bailard. An energetics total load sediment transport model for a plane sloping beach. *Journal of Geophysical Research*, 86, C11:10938–10954, 1981.

- [9] P. G. Baines. *Topographic effects in stratified flows*. Cambridge University Press, 1995.
- [10] R. Barrett, M. Berry, T. F. Chan, J. Demmel, J. Donato, J. Dongarra, V. Eijkhout, R. Pozo, C. Romine, and H. Van der Vorst. *Templates for the solution of linear systems: building blocks for iterative methods*. SIAM, Philadelphia, second edition, 1994.
- [11] J. A. Battjes. Modelling of turbulence in the surf zone. *Symp. on Modelling techniques, ASCE*, 2:1050–1062, 1975.
- [12] J. C. W. Berkhoff. Computation of combined refraction-diffraction. In *13th Conf. Coastal Eng. ASCE*, volume 1, pages 796–814, 1972.
- [13] F. Bianco, G. Puppo, and G. Russo. High-order central schemes for hyperbolic conservation laws. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 21(1):294–322, 1999.
- [14] B. L. Bihari and A. Harten. Multiresolution schemes for the numerical solution of 2-d conservation laws i. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 18(2):315–354, 1997.
- [15] P. Bonneton. Courants moyens générés par la houle en zone de surf. Technical report, Département de Géologie et d’Océanographie, UMR CNRS 5805, Université de Bordeaux 1, 2001.
- [16] N. Booij. A note on the accuracy of the mild slope equation. *Coastal Engineering*, 7:191–203, 1983.
- [17] N. Booij, R. C. Ris, and L.H. Holthuijsen. A third generation model for coastal regions, part i: Model description and validation. *Journal of Geophysical Research*, 104, C6:7649–7666, 1999.
- [18] A. J. Bowen. The generation of longshore current on plane beach. *Journal of Marine Research*, 27:206–214, 1969.
- [19] R. Butel, H. Dupuis, and P. Bonneton. Spatial variability of wave conditions on the french atlantic coast using in-situ data. *Journal of Coastal Research*, 2002. en correction.

- [20] D. Calvete, A. Falques, H. E. DE SWART, and M. Walgreen. Modelling the formation of shoreface-connected sand ridges on storm-dominated inner shelves. *Journal of Fluid Mechanics*, 441:169–193, 2001.
- [21] B. Camenen and P. Larroudé. Numerical comparison of sediment transport formulae. In *Marine Sandwave Dynamics*, Lille, France, 2000.
- [22] B. Castelle. Modélisation de l'évolution morphodynamique des systèmes de barres sableuses sur la côte aquitaine. *DEA Sciences de l'Environnement Marin de Marseille*, 2001.
- [23] V. Casulli. Semi-implicit finite difference method for the two dimensional shallow water equations. *Journal of Computational Physics*, 86:56–73, 1990.
- [24] F. Cayocca. *Modélisation morphodynamique d'une embouchure tidale : application aux passes du bassin d'Arcachon*. PhD thesis, Université Bordeaux 1, 1996.
- [25] F. Cayocca. Long-term morphological modeling of a tidal inlet: the arcachon basin, france. *Coastal Engineering*, 42:115–142, 2001.
- [26] Tony C. Chan and Henk A. van der Vorst. Approximate and incomplete factorizations. *Parallel Numerical Algorithms, ICASE/LaRC Interdisciplinary Series in Science and Engineering*, 4:167–202, 1997. in David E. Keyes, Ahmed Samed and V. Venkatakrishnan (eds).
- [27] A. Chapman, Y. Saad, and L. Wigton. High-order ILU preconditioners for CFD problems. Technical Report umsi-96-14, Minnesota Supercomputer Institute, 1996.
- [28] M. Colombini, G. Seminara, and M. Tubino. Finite-amplitude alternate bars. *Journal of Fluid Mechanics*, 181:213–232, 1987.
- [29] Corine. Coordination des informations sur l'environnement / institut français de l'environnement, 2001.
- [30] W. R. Dally, R. G. Dean, and R.A. Dalrymple. Wave height variations across beaches of arbitrary profile. *Journal of Geophysical Research*, 90:11917–11927, 1985.
- [31] A. G. Davies, J. S. Ribberink, A. Temperville, and J. A. Zysermann. Comparison between sediment transport models and observations made in wave and current flow above plane beds. *Coastal Engineering*, 31:163–169, 1997.

- [32] H. J. de Vriend. 2DH mathematical modelling of morphological evolution in shallow water. *Coastal Engineering*, 11:1–27, 1987.
- [33] H. J. de Vriend. Analysis of two-dimensional morphological evolutions in shallow water. *Journal of Geophysical Research*, 92, C4:3877–3893, 1987.
- [34] H. J. de Vriend. Mathematical modelling and large-scale coastal behaviour; part 1: Physical processes. *Journal of Hydraulic Research*, 29(6):727–740, 1991.
- [35] H. J. de Vriend, W. T. Bakker, and D. P. Bilse. A morphological behaviour model for the outer delta of mixed-energy tidal inlets. *Coastal Engineering*, 23:305–327, 1994.
- [36] H. J. de Vriend, M. Capobianco, T. Chesher, H. E. de Swart, B. Latteux, and M. J. F. Stive. Approaches to long-term modelling of coastal morphology: a review. *Coastal Engineering*, 21:225–269, 1993.
- [37] H. J. de Vriend, J. Zyserman, J. Nicholson, J. A. Roelvink, P. P echon, and H. N. Southgate. Medium-term 2DH coastal area modelling. *Coastal Engineering*, 21:193–224, 1993.
- [38] R. Deigaard, N. Dronen, J. Fredsoe, J. Hjelmager Jensen, and M. P. Jorgensen. A morphological stability analysis for a long straight barred coast. *Coastal Engineering*, 36:177–195, 1999.
- [39] R. Deigaard, J. Fredsoe, and I. B. Hedegaard. Mathematical model for littoral drift. *Jour. of waterway, Port, Coast and Ocean Engineering*, 112:351–369, 1986.
- [40] R. Deigaard, J. Fredsoe, and I. B. Hedegaard. Suspended sediment in the surf zone. *Jour. of waterway, Port, Coast and Ocean Engineering*, 112:115–128, 1986.
- [41] R. Deigaard, J. B. Jakobsen, and J. Fredsoe. Net sediment transport under wave groups and long waves. *Journal of Geophysical Research*, 104, C6:13,559–13,575, 1999.
- [42] R. Deigaard, P. Justesen, and J. Fredsoe. Modelling of undertow by a one-equation turbulence model. *Coastal Engineering*, 13:357–378, 1991.

- [43] G. Dhatt, J.-M. Tanguy, E. Peltier, and B. Zhang. Modélisation de l'évolution des fonds mobiles en mer et en rivière par éléments finis. *Revue européenne des éléments finis*, 3(3):339–361, 1994.
- [44] H. A. Einstein. The bed-load function for sediment transportation in open channel flows. *U.S. Dept. of agriculture, Techn. Bulletin*, 1026, 1950.
- [45] F. Engelund. Instability of erodible beds. *Journal of Fluid Mechanics*, 42(2):225–244, 1970.
- [46] F. Engelund and J. Fredsoe. Sediment ripple and dunes. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 14:13–37, 1982.
- [47] F. M. Exner. Über die wechselwirkung zwischen wasser und geschiebe in flüssen. *Sitzungsber., Akad. Wissenschaften, pt. IIa, Bd. 134*, 1925.
- [48] A. Falqués, D. Calvete, and A. Montoto. Bed-flow instability of coastal current. *Applied Physics Dept., Univ. Polytechnicae de Catalunya*, 1996.
- [49] A. Falqués, A. Montoto, and V. Iranzo. Bed-flow instability of the longshore current. *Continental Shelf Research*, 16(15):1927–1964, 1996.
- [50] M. Fortin and R. Glowinski. *Méthode du lagrangien augmenté. Application à la résolution numérique des problèmes aus limites*. Collection méthodes mathématiques de l'informatique, 1982.
- [51] J. Fredsoe, O. H. Andersen, and S. Silberg. Distribution of suspended sediment in large waves. *Jour. of waterway, Port, Coast and Ocean Engineering*, 111:1041–1059, 1985.
- [52] J. Fredsoe and R. Deigaard. *Mechanics of sediment transport*, volume 3 of *Advanced series on ocean engineering*. World scientific, 1992.
- [53] J. M. Froidefond, J. M. Gallissaire, and R. Prud'Homme. Spatial variation in sinusoidal wave energy on a crescentic nearshore bar. *Journal of Coastal Research*, 6(4):927–942, 1990.
- [54] R. Galappatti and C. B. Vreugdenhil. A depth-integrated model for suspended sediment transport. *Journal of Hydraulic Research*, 23(4):359–377, 1985.

- [55] E.L. Gallagher, S. Elgar, and R.T. Guza. Observations of sand bar evolution on a natural beach. *Journal of Geophysical Research*, 103, c2:3203–3215, 1998.
- [56] T. Gerkema. A linear stability analysis of tidally generated sand waves. *Journal of Fluid Mechanics*, 417:303–322, 2000.
- [57] M. B. Giles. Nonreflecting boundary conditions for euler equation calculations. *AIAA Journal*, 28(12):2050–2058, 1990.
- [58] W. D. Grant and O.S. Madsen. Movable bed roughness in unsteady oscillatory flow. *Journal of Geophysical Research*, 81, C1:469–481, 1982.
- [59] S. Guignard and S.T. Grilli. Modeling of shoaling and breaking waves in a 2d-nwt by using a spilling breaker model. In *11th Offshore and Polar Engng. Conf. (ISOPE01, Stavanger, Norway)*, 2001.
- [60] D-J. Guo and Q-C. Zeng. Open boundary conditions for a numerical shelf sea model. *Journal of Computational Physics*, 116:97–102, 1995.
- [61] L. Hamm, J.-M. Tanguy, and B. Zang. Prise en compte des effets gravitaires dans la modélisation du transport solide. *La Houille Blanche*, 4, 1994.
- [62] C. Hirsch. *Numerical computation of internal and external flows*, volume 1: fundamentals of numerical discretization. Wiley-Interscience, 1988.
- [63] C. Hirsch. *Numerical computation of internal and external flows*, volume 2: computational methods for inviscid and viscous flows. Wiley-Interscience, 1990.
- [64] K. Horikawa. *Nearshore dynamics and coastal processes*. University of Tokyo Press, 1988.
- [65] S.J.M.H Hulscher, H.E. de Swart, and H.J. de Vriend. The generation of offshore tidal sand banks and sand waves. *Journal of Fluid Mechanics*, 13(11):1183–1204, 1993.
- [66] I. D. James. A non-linear theory of longshore currents. *Estuar. Coast. Mar. Sci.*, 2:235–249, 1974.
- [67] Z. G. Ji and C. Mendoza. Weakly nonlinear stability analysis for dune formation. *Journal of Hydraulic Engineering*, 123(11):979–985, November 1997.

- [68] G. S. Jiang, D. Levy, C.-T. Lin, S. Osher, and E. Tadmor. High-resolution nonoscillatory central schemes with nonstaggered grids for hyperbolic conservation laws. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 35(6):2147–2168, 1998.
- [69] G. S. Jiang and E. Tadmor. Nonoscillatory central schemes for multidimensional hyperbolic conservation laws. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 19(6):1892–1917, 1998.
- [70] J. F. Kennedy. The mechanics of dunes and antidunes in erodible-bed channels. *Journal of Fluid Mechanics*, 16(4):521–546, 1963.
- [71] J. T. Kirby and R. A. Dalrymple. A parabolic equation for the combined refraction-diffraction of stokes waves by mildly varying topography. *Journal of Fluid Mechanics*, 136:543–566, 1983.
- [72] J. T. Kirby and R. A. Dalrymple. *REF/DIF 1, Version 2.5, Documentation and User's Manual*. Center for Applied Coastal Research, Department of Civil Engineering, University of Delaware, 1994.
- [73] N. L. Komarova and A. C. Newell. Nonlinear dynamics of sand banks and sand waves. *Journal of Fluid Mechanics*, 415:285–321, 2000.
- [74] V. Lafon, D. De Melo, H. Dupuis, R. Butel, and D. Michel. Subtidal and intertidal rhythmic bar morphodynamics in a mixed-energy environment by remote sensing. *Soumis à Marine Research*, 2000.
- [75] B. Latteux. Modélisation du transport solide: Méthodologie à long terme de l'évolution des fonds. Technical report, LNH HE-42/87.25, 1987.
- [76] B. Latteux. Techniques for long-term morphodynamical simulation under tidal action. *Marine Geology*, 1995.
- [77] R. J. LeVeque. *Numerical methods for conservation laws*. Lectures in Mathematics. Birkhauser Verlag, 2nd edition, 1992.
- [78] J. Lighthill. *Waves in fluids*. Cambridge University Press, 1978.
- [79] P. L. F. Liu and R. A. Dalrymple. Bottom frictional stresses and longshore currents due to waves with large angles of incidence. *Journal of Marine Research*, 36:357–375, 1978.

- [80] M. S. Longuet-Higgins. Longshore current generated by obliquely incident sea waves. *Journal of Geophysical Research*, 75:6778–6801, 1970.
- [81] P. A. Madsen, O. R. Sorensen, and H. A. Schaeffer. Surf and zone dynamics simulated by a boussinesq type model: Parti: Model description and cross-shore motion of regular waves. *Coastal Engineering*, 32:255–287, 1997.
- [82] S. R. McLean. The stability of ripples and dunes. *Earth-Science Reviews*, 29:131–144, 1990.
- [83] C. C. Mei. *The applied dynamics of ocean surface waves*, volume 1 of *Advanced series on ocean engineering*. World scientific, 1989.
- [84] C. C. Mei and E. O. Tuck. Forward scattering by thin bodies. *SIAM J. Appl. Math.*, 39:178–191, 1980.
- [85] J. A. Meijerink and H. A. van der Vorst. An iterative solution method for linear systems of which the coefficient matrix is a symmetric m-matrix. *Mathematics of computations*, 31(137):148–162, 1977.
- [86] H. Michallet, B. Camenen, S. Bottero, P. Larroudé, and E. Barthélemy. Evolution d'une barre sableuse sous un courant permanent. *7ième journée nationale de génie côtier et génie civil, Anglet, France*, 2002.
- [87] D. Michel and H. Howa. Short term morphodynamics response of a ridge and runnel system on a meso-tidal sandy beach. *Journal of Coastal Research*, 15(2):428–437, 1999.
- [88] A. R. Mitchell and D. F. Griffiths. *The finite difference method in partial differential equations*. John Wiley, 1980.
- [89] T. Molls and M.H. Chaudhry. Depth-averaged open-channel flow model. *Journal of Hydraulic Engineering*, 121(6):453–465, 1995.
- [90] D. Myrhaug. A rational approach to wave friction coefficient for rough, smooth and transitional turbulent flow. *Coastal Engineering*, 13:11–21, 1989.
- [91] B. A. Nawachukwu. *Flow and erosion near groyne-like structures*. PhD thesis, University of Alberta, Edmonton, Canada, 1979.

- [92] J. Nicholson, I. Broker, J.A. Roelvink, D. Price, J.M. Tanguy, and L. Moreno. Inter-comparison of coastal area morphodynamic models. *Coastal Engineering*, 31:97–123, 1997.
- [93] P. Nielsen. *Coastal bottom boundary layers and sediment transport*, volume 4 of *Advanced series on ocean engineering*. World scientific, 1992.
- [94] J. Nikuradse. Gesetzmässigkeiten der turbulenten stömung in glatten rohren. *VDI-Forschungsheft 356*, 1932. Berlin. English translation as: Laws of flow in rough pipes.
- [95] B.A. O’connor, C.R. Nunes, and A.J.N.A. Sarmiento. Sand wave dimensions and statistics. *CSTAB Handbook and Final Report (ed. B.A. O’Connor)*, 1996.
- [96] A. Okayasu, T. Shibayama, and K. Horikawa. Vertical variation of undertow in the surf zone. In *21st Coastal Engineering Conference*, pages 478–491, 1988.
- [97] J. Oltman-Shay, P.A. Howd, and W. A. Birkemeir. Shear instabilities of the mean longshore current, 2, field observations. *Journal of Geophysical Research*, 94:18031–18042, 1989.
- [98] I. Orlanski. A simple boundary condition for hyperbolic flows. *Journal of Computational Physics*, 21:251–269, 1976.
- [99] S. Ouillon. *Modélisation mathématique de l’hydrodynamique à surface libre et du transport en suspension de sédiments non cohésifs. Aide à l’interprétation d’images spatiales*. PhD thesis, Institut national polytechnique de Toulouse, 1993.
- [100] G. Parker. On the cause and characteristic scales of meandering and braiding in rivers. *Journal of Fluid Mechanics*, 76:457–480, 1976.
- [101] S. V. Patankar. *Numerical heat transfert and fluid flow*. Hemisphere publishing corporation, New-York, 1980.
- [102] J. Peraire and O. C. Zienkiewicz. Shallow water problems: a general explicit formulation. *Int. J. Num. Math. in Eng.*, 22:547–574, 1986.
- [103] O.M. Phillips. The dynamics of the upper ocean. *Cambridge University Press*, 1977.

- [104] Pedreros R., H.L. Howa, and D. Michel. Application of grain size trend analysis for the determination of sediment transport pathways in intertidal areas. *Marine Geology*, 135:35–49, 1996.
- [105] A. J. Raudkivi. The roughness hight under waves. *Journal of Hydraulic Research*, 26(5), 1988.
- [106] K. J. Richards. The formation of ripple and dunes on an erodible bed. *Journal of Fluid Mechanics*, 99(3):597–618, 1980.
- [107] J. A. Roelvink and J.F. Stive. Bar-generation cross-shore flow mechanisms on a beach. *Journal of Geophysical Research*, 94, C4:4785–4800, 1989.
- [108] P. Bonneton S. Vincent, J-P. Caltagirone. Numerical modelling of bore propagation and run-up on sloping beaches using a maccormack tvd scheme. *Journal of Hydraulic Research*, 39(1):41–49, 2001.
- [109] Y. Saad. Krylov subspace methods for solving large unsymmetric linear systems. *Mathematics of computations*, 37:105–126, 1981.
- [110] Y. Saad. Hight-performance iterative solution methods. In *Workshop on numerical methods for large scale linear systemes of equations*, Canberra, Australia, 1998. Australian national university.
- [111] Y. Saad and H. A. van der Vorst. Iterative solution of linear systems in the 20th century. *Journal Computational and Applied Mathematics*, 1999.
- [112] F. Saint-Cast, P. Bonneton, and J. P. Caltagirone. On the splitting of the sediment fluxes balance: a new formulation for the sandwave equation. *Coastal Engineering 5, Computer Modelling of Seas and Coastal Regions*, pages 3–12, 2001.
- [113] F. Saint-Cast, B. Castelle, P. Bonneton, and J. P. Caltagirone. Modélisation des écoulements induits par la houle sur les plages d’aquitaine. *7ième journée nationale de génie côtier et génie civil*, Anglet, France, 2002.
- [114] R. Schielen, A. Doelman, and H. E. de Swart. On the nonlinear dynamics of free bars in stright channels. *Journal of Fluid Mechanics*, 252:325–356, 1993.

- [115] H. M. Schuttelaars and H. E. de Swart. An idealized long-term morphodynamic model of a tidal embayment. *European Journal of Mechanics, B/Fluids*, 15(1):55–80, 1996.
- [116] H. M. Schuttelaars and H. E. de Swart. Initial formation of channels and shoals in a short tidal embayment. *Journal of Fluid Mechanics*, 386:15–42, 1999.
- [117] M. Sekine and G. Parker. Bed-load transport on transverse slope. *Journal of Hydraulic Engineering ASCE*, 118(4):513–535, 1992.
- [118] C.W. Shu and S. Osher. Efficient implementation of essentially nonoscillatory schemes. *Journal of Computational Physics*, 83:32–78, 1989.
- [119] D.N. Slinn. Nonlinear shear instabilities of alongshore currents over barred beaches. *Journal of Geophysical Research*, 103, C9:18357–18379, 1998.
- [120] N. Sénéchal, P. Bonneton, and H. Dupuis. Field experiment on secondary wave generation on a barred beach and the consequent evolution of energy dissipation on the beach face. *Coastal Engineering*, 2002. sous presse.
- [121] G. A. Sod. *Numerical methods in fluid dynamics: Initial and boundary-value problems*. Cambridge, 1985.
- [122] R. L. Soulsby. *Dynamics of marine sands*. Thomas Telford, 1997.
- [123] R. L. Soulsby, L. Hamm, G. Klopman, D. Myrhaug, R. R. Simons, and G. P. Thomas. Wave-current interaction within and outside the bottom boundary layer. *Coastal Engineering*, 21:41–69, 1993.
- [124] R. L. Soulsby and R. J. S. W. Whitehouse. Threshold of sediment motion in coastal environments. *Pacific coast and ports '97 Conf.*, 1:149–154, 1997.
- [125] J. L. Steger and R. F. Warming. Flux splitting of the inviscid gas-dynamic equation with applications to finite difference methods. *Journal of Computational Physics*, 40:263–293, 1981.
- [126] G. S. Stelling. On the construction of computational methods for shallow water flow problems. *Rijwaterstaat communication*, 1984.

- [127] I. A. Svendsen. Mass flux and undertow in the surf zone. *Coastal Engineering*, 8:347–366, 1984.
- [128] I. A. Svendsen and U. Putrevu. Surf-zone hydrodynamique. *Advances in coastal and ocean engineering*, 1996.
- [129] D. H. Swart. Predictive equations regarding coastal transports. *Coastal engineering congress*, 1976.
- [130] P. K. Sweby. High resolution schemes using flux limiters for hyperbolic conservation laws. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 21(5):995–1011, 1984.
- [131] G. Symonds, D. A. Huntley, and A. J. Bowen. Two-dimensional surf beat: long wave generation by time-varying breakpoint. *Journal of Geophysical Research*, 87, C1:492–498, 1982.
- [132] Y. Tang and R. Grimshaw. Radiation boundary conditions in barotropic coastal ocean numerical models. *Journal of Computational Physics*, 123:96–110, 1996.
- [133] R. Théodor and P. Lascaux. *Analyse numérique matricielle appliquée à l'art de l'ingénieur*. Masson, 1986.
- [134] R. Théodor and P. Lascaux. *Analyse numérique matricielle appliquée à l'art de l'ingénieur*. Masson, 1987.
- [135] K. W. Thompson. Time dependent boundary conditions for hyperbolic systems. *Journal of Computational Physics*, 68:1–21, 1987.
- [136] E. B. Thornton. Variation of longshore current across the surf zone. In *12th. Coastal Eng. Conf. ASCE*, pages 291–308, 1970.
- [137] E. B. Thornton and R. T. Guza. Surf zone longshore current and random waves: Field data and models. *J. Phys. Oceanogr.*, 16:1165–1178, 1986.
- [138] E.B. Thorton and R.T. Humiston. Bar/trough generation on a natural beach. *Journal of Geophysical Research*, 101, C5:12097–12110, 1996.
- [139] J.H. Trowbridge. A mechanism for the formation and maintenance of shore-oblique sand ridges on storm-dominated shelves. *Journal of Geophysical Research*, 100, C8:16071–16086, 1995.

- [140] A. van der Sluis. Condition numbers and equilibration of matrices. *Num. Math.*, 14:14–23, 1969.
- [141] H.A. van der Vorst. Parallel iterative solution methods for linear systems arising from discretized PDE's. In *Workshop Lecture Notes*, Neuilly-sur-Seine, France, 1995. Special Course on Parallel Computing in CFD.
- [142] L. C. van Rijn. *Handbook of sediment transport by currents and waves*. Delft Hydraulic, second edition, January 1990.
- [143] S. Vincent and J.P. Caltagirone. Efficient solving method for unsteady incompressible interfacial flow problems. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 30:795–811, 1999.
- [144] G. Vittori, H.E. De Swart, and P. Blondeaux. Crescentic bedforms in the nearshore region. *Journal of Fluid Mechanics*, 381:271–303, 1999.
- [145] G. Voulgaris, S. Wallbridge, B. N. Tomlinson, and M. B. Collins. Laboratory investigations into wave periode effects on sand bed erodibility, under the combined action of waves and currents. *Coastal Engineering*, 26:117–134, 1995.
- [146] C. B. Vreugdenhil. Numerical methods for shallow water flow. *Von Karman Institute for fluid dynamics, Lecture series*, pages 1903–1990, 1990.
- [147] Z. B. Wang. Theoretical analysis on depth-integrated modelling of suspended sediment transport. *Journal of Hydraulic Research*, 30(3):403–421, 1992.
- [148] Z. B. Wang, T. Louters, and H.J. de Vriend. Morphodynamic modelling for a tidal inlet in the wadden sea. *Marine geology*, 126:189–300, 1995.
- [149] H. G. Wind and C. B. Vreugdenhil. Rip-current generation near structure. *Journal of Fluid Mechanics*, 171:459–476, 1986.
- [150] H. C. Yee. Construction of explicit and implicit symmetric TVD schemes and their applications. *Journal of Computational Physics*, 68:151–179, 1987.
- [151] H. C. Yee. Upwind and symmetric shock-capturing schemes. Technical memorandum 89464, NASA, May 1987.

- [152] J. A. Zyserman, I. B. Hedeggaard, J. Fredsoe, and R Deigaard. Requirements to sediment transport model for morphological modelling. *Computer Modelling in Ocean Engineering*, pages 261–170, 1991.

## **Modélisation de la morphodynamique des corps sableux en milieu littoral**

**Résumé :** Cette thèse présente la modélisation physique et la résolution numérique du couplage entre l'hydrodynamique littorale en présence de vagues déferlantes et la dynamique sédimentaire pour analyser la morphodynamique des bancs de sable sur une plage. D'une part, le modèle hydrodynamique 2D-Horizontale permet de décrire les courants moyens induits par la houle et d'en déduire le transport sédimentaire associé. L'évolution du fond sableux est ensuite obtenue par le bilan des flux de sédiment. Dans certaines conditions d'écoulement, une modélisation morphodynamique simplifiée permet de décrire le comportement des ondes de sable. D'autre part, l'hydrodynamique est résolue de manière implicite pour obtenir une solution quasi-stationnaire des courants moyens tandis que l'évolution du fond est calculée avec des méthodes explicites d'ordres supérieurs non-oscillantes. Enfin, les simulations effectuées sur une plage d'Aquitaine mettent en avant le potentiel de l'outil numérique réalisé.

**Mots clefs :** hydrodynamique 2D-horizontale, courant induit par la houle, transport sédimentaire, morphodynamique, instabilité de plage, ondes de sable, plage d'Aquitaine, volume finis, méthode implicite, résolution couplée, loi de conservation hyperbolique, méthode explicite non oscillante.

## **Modeling of sand bank morphodynamics in coastal areas**

**Abstract :** This thesis presents physical modeling and numerical resolution of the coastal hydrodynamics and sediment dynamics coupling in order to investigate sand bancs morphodynamics in the presence of breaking waves. The 2D-Horizontal hydrodynamics model provides the waves-induced current. The sediment transport can be deduced, and then, the sediment fluxes balance gives the sand bed evolution. Under few assumptions, a simplified morphodynamics model can explain sand waves behavior. Hydrodynamics is solved using an implicit method to obtain quasi-steady mean currents, and bed evolution is computed using non-oscillating explicit schemes. Finally, the interest of this numerical simulation tool is emphasized on the aquitan's beach application.

**Keywords :** 2D-Horizontal hydrodynamics, waves-induced current, sediment transport, morphodynamics, beach instabilities, sand waves, Aquitan's beach, finite volume method, implicit scheme, coupled solving, hyperbolic conservation law, non-oscillating explicit schemes.